MATHEMATICS I -May 2011 Kopaonik

1. For the matrix

$$A = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad n\in\mathbb{N}, \ \ a,b\in\mathbb{R}, \ a\neq b.$$

   determine $\det(A)$.

2. Prove that the sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is defined with $x_1 = a \leq 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{4-3x_n}$, $n \geq 1$ convergent and find its limit value.

3. The function $F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, is given with

$$F(x) = \int_{-1/2}^{x} \frac{t + \operatorname{arctg} t}{1+t} dt.$$

   a) Show that the function F has exactly two zeros.

   b) Prove that the function $H : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, given with $H(x) = \frac{x^2+x+2}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$ has the horizontal asymptote, and that the function F has at least one point of inflection.

MATEMATIKA I -maj 2011 Kopaonik

1. Izračunati determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad n\in\mathbb{N}, \ \ a,b\in\mathbb{R}, \ a\neq b.$$

2. Pokazati da je niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definisan sa $x_1 = a \leq 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{4-3x_n}$, $n \geq 1$ konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

3. Data je funkcija $F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, sa

$$F(x) = \int_{-1/2}^{x} \frac{t + \operatorname{arctg} t}{1+t} dt.$$

   a) Dokazati da funkcija F ima tačno dve nule.

   b) Pokazati da funkcija $H : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, data sa $H(x) = \frac{x^2+x+2}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$ ima horizontalnu asimptotu, a da funkcija F ima bar jednu prevojnu tačku.

Mentor takmičenja: Nebojša M. Ralević

Rešenje:

1. Neka je $D_n = \det(A),\ n \in \mathbb{N}$. Tada je $D_1 = a+b,\ \ D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2+ab+b^2$,

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)[(a+b)^2 - ab] - ab(a+b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

Pretpostavimo da je $D_n = a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$ i to dokažimo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ smo već dokazali. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve $k < n$ i dokažimo za n. Razvojem po prvoj vrsti imamo

$$D_n = (a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$-ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

Koristeći indukcijsku pretpostavku sada imamo $D_n = (a+b)\cdot\frac{a^n-b^n}{a-b} - ab\cdot\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$, te važi tvrđenje.

Determinanta se mogla izračunati i koristeći rekurentnu vezu $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$. Rešenja ove diferencne jednačine dobijamo posmatrajući njenu karakterističnu jednačinu $r^2-(a+b)r+ab=0$ čija su rešenja $r_1 = a$, $r_2 = b$ realna i različita te je opšte rešenje te diferencne jednačine $D_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda a^n + \mu b^n$. Kako je

$$D_1 = \lambda a + \mu b = a+b,\ \ D_2 = \lambda a^2 + \mu b^2 = a^2+ab+b^2,$$

rešavanjem ovog sistema nalazimo da je $\lambda = \frac{a}{a-b}$, $\mu = -\frac{b}{a-b}$, te je

$$D_n = \frac{a}{a-b}\cdot a^n - \frac{a}{a-b}\cdot b^n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

2. Važi

$$x_n \uparrow \Leftrightarrow x_n < x_{n+1} \Leftrightarrow x_n < \frac{1}{4-3x_n} \Leftrightarrow 0 < \frac{3x_n^2-4x_n+1}{4-3x_n} \Leftrightarrow x_n \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \frac{4}{3}), \tag{1}$$

$$x_n \downarrow \Leftrightarrow x_n \in (\frac{1}{3}, 1) \cup (\frac{4}{3}, \infty). \tag{2}$$

Neka je $a \in (\frac{1}{3}, 1)$. Dokažimo indukcijom $\frac{1}{3} < x_n < 1$. Zaista $\frac{1}{3} < x_1 = a < 1$. Pretpostavimo da je $\frac{1}{3} < x_k < 1$, tada je $1 < 3x_k < 3$, $-1 > -3x_k > -3$, $3 > 4-3x_k > 1$, $\frac{1}{3} < \frac{1}{4-3x_k} < 1$, tj. $\frac{1}{3} < x_{k+1} < 1$, te važi tvrđenje. Iz tog tvrđenja i (2) sledi da je niz i monotono opadajući, a kako je ograničen sa donje strane konvergira svom infimumu L. Kako je i $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ to iz $x_{n+1} = \frac{1}{4-3x_n}$, sledi $L = \frac{1}{4-3L} \Leftrightarrow 3L^2 - 4L + 1 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{1}{3} \vee L = 1$. Jasno je da je u ovom slučaju $L = \frac{1}{3}$.

Neka je $a < \frac{1}{3}$. Dokažimo indukcijom $x_n < \frac{1}{3}$. Baza indukcije je ispunjena jer $x_1 = a < \frac{1}{3}$. Pretpostavimo da je $x_k < \frac{1}{3}$, tada je $3x_k < 1$, $4-3x_k > 3$, $x_{k+1} = \frac{1}{4-3x_k} < \frac{1}{3}$, te važi tvrđenje. Iz njega i (1) sledi da je niz i monotono rastući, a kako je ograničen sa gornje strane konvergira svom supremumu L. I u ovom slučaju je $L = \frac{1}{3}$.

Za $a\frac{1}{3}$ imamo da je $x_1 = a = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$,... Pretpostavimo da je $x_k = \frac{1}{3}$, tada je $x_{k+1} = \frac{1}{4-3x_k} = \frac{1}{3}$, tj. važi da je niz konstantan i da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = \frac{1}{3}$.

Za $a = 1$ imamo da je $x_1 = a = 1$, $x_2 = 1$,... Pretpostavimo da je $x_k = 1$, tada je $x_{k+1} = \frac{1}{4-3x_k} = 1$, tj. niz je konstantan i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = 1$.

3. $F(x) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{t+\operatorname{arctg} t}{1+t} dt \Rightarrow F'(x) = \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x} = f(x) \Rightarrow F''(x) = \frac{(1+\frac{1}{1+x^2})(1+x)-(x+\operatorname{arctg} x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}[\frac{x^2+x+2}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x] = \frac{H(x)}{(1+x)^2}$

a) $x \in (-1, 0) \Rightarrow \operatorname{arctg} x < 0 \Rightarrow F'(x) = \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x} < 0$, $\ x = 0 \Rightarrow F'(x) = 0$, $\ x \in (0, \infty) \Rightarrow \operatorname{arctg} x > 0 \Rightarrow F'(x) > 0$. Dakle, $x_{\min} = 0$.

Jedna nula je $x_1 = -\frac{1}{2}$ jer je $F(-\frac{1}{2}) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt = 0$. Pokažimo da postoji još jedna nula $x_2 > 0$.

Kako je F opadajuća za $x \in (-1, 0)$ to je $F(0) = F(x_{\min}) < F(-\frac{1}{2}) = 0$.
Postoji $\xi > \operatorname{tg} 1 > 0$, (te je $\operatorname{arctg} \xi > 1$) takvo da važi

$$F(\xi) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\xi} f(t)dt = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\operatorname{tg} 1} f(t)dt + \int\limits_{\operatorname{tg} 1}^{\xi} (1 + \frac{\operatorname{arctg} t - 1}{1+t} dt = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\operatorname{tg} 1} f(t)dt + \int\limits_{\operatorname{tg} 1}^{\xi} \frac{\operatorname{arctg} t - 1}{1+t} dt + \xi - \operatorname{tg} 1.$$

Izraz $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\operatorname{tg} 1} f(t)dt - \operatorname{tg} 1$ može biti i negativan ali je konstantan, dok je izraz $\int\limits_{\operatorname{tg} 1}^{\xi} \frac{\operatorname{arctg} t-1}{1+t} dt + \xi$ pozitivan i sa povećavanjem ξ može biti proizvoljno veliki, te je stoga $F(\xi) > 0$. Funkcija F je neprekidna (f je neprekidna za $x \geq 0$) i različitog je znaka u 0 i u ξ, pa seče x osu, tj. postoji $x_2 > 0$, tako da je $F(x_2) = 0$.

Neprekidna monotono rastuća funkcija F (za $x > 0$) ima najviše jednu nulu, tj. grafik seče x osu u najviše jednoj tački te F nema više nula. (Monotona funkcija je injektivna te ne postoje dve različita argumenta u kojima je vrednost funkcije 0. Drugo objašnjenje bi npr. sledilo iz Rolove teoreme, odnosno ukoliko grafik seče x osu u dve različite $\alpha, \beta > 0$ imali: $0 = F(\alpha) - F(x_2) = F'(\xi)(\alpha - \beta), \xi \in (\alpha, \beta)$ tj. $F'(\xi) = 0, \xi \in (\alpha, \beta)$ što je kontradikcija sa pretpostavkom da je funkcija monotono rastuća.)

b) Prava $y = 1 - \frac{\pi}{2}$ je horizontalna asimptota što sledi iz $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^2+x+2}{1+x^2} - \arctan x) = 1 - \frac{\pi}{2} = a < 0$. Iz te činjenice je $(\forall\varepsilon > 0)(\exists x_1 > 0)(\forall x > x_1)$ $\ |H(x) - a| < \epsilon$ tj. $H(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pa npr. za $\varepsilon = 0.01$ imamo (jer je $1 - \frac{\pi}{2} = a$) da je $H(x) < 0$, pa i $H(x_1) < 0$.

Stoga je $F''(x_1) = \frac{H(x_1)}{(x_1+1)^2} < 0$, a važi i $F''(0) = \frac{H(0)}{(1+0)^2} = 2 > 0$, te iz neprekidnosti F'' sledi da postoji $\gamma \in (0, x_1)$, tako da je $F''(\gamma) = 0$ i pri tome F'' menja znak u γ, odnosno $(\gamma, F(\gamma))$ je prevojna tačka funkcije F.