MATHEMATICS I -May 2012   Kranevo, Bulgarska

1. For the matrix
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad n\geq 3,$$
determine A^{-1}.

2. Let $a>b>0$ and the sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ defined by $a_1=a$, $b_1=b$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$. Prove that the sequence $\{a_n\}$ monotonic decreasing, and sequence $\{b_n\}$ increasing and that both sequences converges towards the same number.

3. Find the primitive function of:
$$f(x)=\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}.$$

MATEMATIKA I -maj 2012   Kranevo, Bulgaria

1. Izračunati inverznu matricu matrice
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad n\geq 3.$$

2. Neka je $a>b>0$ i neka su dati nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ definisani sa $a_1=a$, $b_1=b$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$. Dokazati da je niz $\{a_n\}$ opadajući, a niz $\{b_n\}$ rastući i da oba niza konvergiraju ka istom broju.

3. Naći primitivnu funkciju od:
$$f(x)=\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}.$$

Mentor takmičenja: Nebojša M. Ralević

1. Posmatrajmo proširenu matricu $[A|E]$. Vršenjem elementarnih transformacija na vrstama te matrice dobijemo matricu $[E|A^{-1}]$. Prvu matricu u tom postupku dobijamo tako što oduzmemo od prve vrste proširene matrice drugu, od druge treću itd. od $(n-1)-$ve vrste oduzmemo $n-$tu. Drugu matricu u tom postupku dobijamo na isti način od te matrice, tj. oduzmemo od prve vrste drugu, od druge treću itd. od $(n-1)-$ve vrste oduzmemo $n-$tu.
$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]_{n\times n}$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]_{n\times n}$$

$$\sim [E|A^{-1}] = \left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]_{n\times n}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

2. Pokažimo indukcijom da je $a_n > b_n > 0$. Za $n = 1$ tvrđenje sledi iz pretpostavke zadatka. Pretpostavimo $a_n > b_n > 0$, tada je $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} > \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1} > 0$ (nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine. Znak jednakosti važi samo ako je $a_n = b_n$).

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} < 0 \Rightarrow a_n \nearrow .$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) > 0 \Rightarrow b_n \searrow .$$

Niz a_n je ograničen sa donje strane, jer za svako a_n iz monotonosti niza b_n je $b_n > b_1 = b$, tj. $a_n > b$. Niz b_n je ograničen sa gornje strane, jer za svako b_n iz monotonosti niza a_n je $a_n < a_1 = a$, tj. $b_n < a$. Dakle, nizovi a_n i b_n su monotoni i ograničeni, pa su i konvergentni.

Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Tada iz $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \Rightarrow a = \frac{a+b}{2}$, tj. $a = b$ što je i trebalo dokazati. Granična vrednost nizova a_n i b_n je tzv. aritmetička geometrijska sredina a i b i može se izraziti preko eliptičnih integrala.

3. Primitivnu funkciju $F(x)$ tražimo na bilo kojem intervalu I koji ne sadrži nule funkcije $x\sin x + \cos x$. Zbog $f(x) = -\frac{x}{\cos x} \cdot (-\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2})$, u parcijalnoj integraciji te funkcije uzimamo $u = \frac{x}{\cos x}$, $dv = -\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$, $du = \frac{\cos x - x(-\sin x)}{\cos^2 x}dx = \frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}dx$, $v = -\int \frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx = -\int \frac{dt}{t^2} = t^{-1} = \frac{1}{x\sin x+\cos x}$, pa imamo

$$F(x) = -(\frac{x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x\sin x + \cos x} - \int \frac{1}{x\sin x + \cos x} \cdot \frac{x\sin x + \cos x}{\cos^2 x}dx) = -\frac{x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} + \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{-x + x\sin^2 x + \sin x\cos x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} = \frac{-x\cos^2 x + \sin x\cos x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} = \frac{-x\cos x + \sin x}{x\sin x + \cos x}.$$