

4. Analogne modulacije

Analog Modulations

Zadatak

U AM-2BO sistemu frekvencija nosioca iznosi $f_C = 500 \text{ kHz}$. Modulišući signal $m(t)$ ima uniformnu spektralnu gustinu snage ograničenu na 4 kHz. Modulirani signal se prenosi kanalom bez izobličenja i kome deluje šum spektralne gustine snage $S_n(\omega) = 1/(\omega^2 + a^2)$, pri čemu je $a = 10^6 \pi$. Snaga korisnog signala na ulazu u prijemnik iznosi $1 \mu\text{W}$. Prijemnik se sastoji od idealnog pojasnog filtra i demodulatora AM-2BO signala. Odrediti odnos snage korisnog signala i šuma (SNR) na izlazu iz prijemnika.

Problem

In a double sideband suppressed carrier (DSB-SC) system, the carrier frequency is $f_C = 500 \text{ kHz}$, and the modulating signal $m(t)$ has a uniform power spectral density (PSD) band-limited to 4 kHz . The modulated signal is transmitted over a distortionless channel with a noise PSD $S_n(\omega) = 1/(\omega^2 + a^2)$, where $a = 10^6 \pi$. The useful signal power at the receiver input is $1 \mu\text{W}$. The receiver consists of ideal bandpass filter and a demodulator of DSB-SC signal. Determine the output signal-to-noise ratio (SNR).

4. Analogne modulacije

Rešenje

Ako je primljeni signal $km(t)\cos\omega_c t$, na ulazu u demodulator delovaće zajedno koristan signal i uskopojasni šum $[km(t) + n_c(t)]\cos\omega_c t + n_s(t)\sin\omega_c t$. U prethodnom izrazu je primenjeno razlaganje uskopojasnog šuma $n(t)$ na komponente u fazi $n_c(t)$ i kvadraturi $n_s(t)$. Proces demodulacije se odvija tako što se signal na ulazu demodulatora množi sa $2\cos\omega_c t$ i zatim filtrira niskopropusnim (NF) filtrom. Na izlazu se dobija signal $s_o(t) + n_o(t) = km(t) + n_c(t)$. Snaga signala na izlazu biće $S_o = k^2 \overline{m^2(t)}$, dok će snaga šuma biti $N_o = \overline{n_c^2(t)}$. Snaga primljenog korisnog signala $km(t)\cos\omega_c t$ jednaka je $1\mu W$, dakle $\frac{1}{2}k^2 \overline{m^2(t)} = 10^{-6} W$, odakle je $S_o = k^2 \overline{m^2(t)} = 2 \cdot 10^{-6} W$.

Kako su snage komponenti uskopojasnog šuma u fazi i kvadraturi jednake ukupnoj snazi uskopojasnog šuma, to važi da je $N_o = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n^2(t)}$. Ukupna snaga uskopojasnog šuma koji postoji na izlazu pojasnog filtra (čija je širina $B = 8 \text{ kHz}$ i centralna učestanost $f_c = 500 \text{ kHz}$) iznosi

$$\overline{n^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)496000 \text{ Hz}}^{(2\pi)504000 \text{ Hz}} S_n(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi a} \arctg \frac{\omega}{a} \Big|_{(2\pi)496000}^{(2\pi)504000} = 8.25 \cdot 10^{-10} W = N_o.$$

Stoga odnos signal-šum iznosi:

$$SNR = S_o / N_o = 2 \cdot 10^{-6} / 8.25 \cdot 10^{-10} = 2.42 \cdot 10^3 = 33.83 \text{ dB}$$

5. Digitalne komunikacije Digital Telecommunications

Zadatak

Posmatra se MPSK sistem za prenos signala sa koherentnom demodulacijom:

- Pokazati da je u korelacionom prijemu dovoljno da postoje samo dve grane, jedna prilagođena na komponentu u fazi, a druga na komponentu u kvadraturi.
- Odrediti koliko je maksimalno dozvoljeno fazno odstupanje θ između nosioca na predajnoj i na prijemnoj strani (smatra se da je uticaj šuma u kanalu zanemarljiv).
- Ako u korelacionom prijemu BPSK signala prilagođenom na oba talasna oblika, postoji fazna greška θ u odnosu na nosilac na predaji, izračunati vrednost fazne greške koja će izazvati povećanje verovatnoće greške sa $4 \cdot 10^{-4}$ (za slučaj kada je $\theta = 0$) na $4 \cdot 10^{-3}$. Prenos se vrši preko AWGN kanala.

Sve moguće vrednosti faze modulisanog signala su jednako verovatne. Važi $f_0 = \frac{k}{T}$, gde je T trajanje signalizacionog intervala, f_0 je frekvencija nosioca, a k je neki ceo broj.

Problem

Consider a coherent MPSK system:

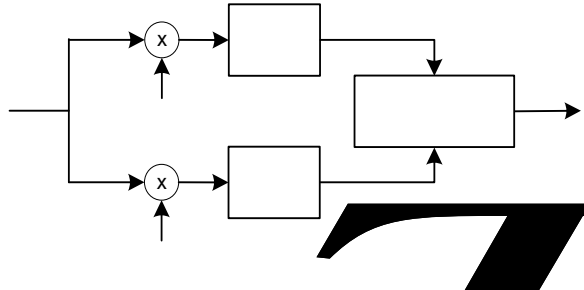
- Show that the correlation receiver with two correlators – one matched to in-phase component and the other matched to quadrature component is sufficient for the detection.
- What is the maximum phase offset between the carriers on the transmitting and the receiving side for which the receiver will still operate correctly (channel noise is negligible)?
- If BPSK is used, calculate the phase offset that would increase the probability of error from $4 \cdot 10^{-4}$ (no phase offset) to $4 \cdot 10^{-3}$, for the correlation receiver matched to both waveforms and the AWGN channel.

All waveforms (phase values of the modulated signal) are equally likely. Assume that $f_0 = \frac{k}{T}$, where T is the duration of symbol interval, f_0 is the carrier frequency, and k is an integer.

5. Digitalne komunikacije

Rešenje

- a) Optimalni koherentni MPSK prijemnik je prikazan na slici 5.1.



Slika 5.1

U k -tom signalizacionom intervalu prenošeni signal je:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \Phi_k).$$

Nakon množenja sa kosinusiodom i integraljenja, dobija se:

$$X = \int_0^T A \cos(2\pi f_0 t - \Phi_k) \cos(2\pi f_0 t) dt = \frac{A \cos \Phi_k}{2} \int_0^T dt + \frac{A}{2} \int_0^T \cos(4\pi f_0 t - \Phi_k) dt = \frac{AT}{2} \cos \Phi_k$$

uz pretpostavku da je $f_0 = \frac{k}{T}$.

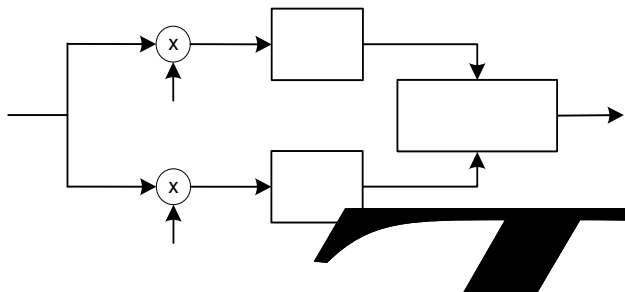
Za granu sa sinusoidom se na sličan način dobija:

$$Y = \frac{AT}{2} \sin \Phi_k.$$

Važi:

$$\phi = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) = \arctan\left(\frac{\sin \Phi_k}{\cos \Phi_k}\right) = \Phi_k. \quad (35 \text{ bodova, napomena} - \text{ dozvoljene su nesuštinske varijacije u izgledu prijemnika}).$$

- b) Ako postoji fazno odstupanje θ između nosioca na predajnoj i na prijemnoj strani lako se pokazuje da važi:



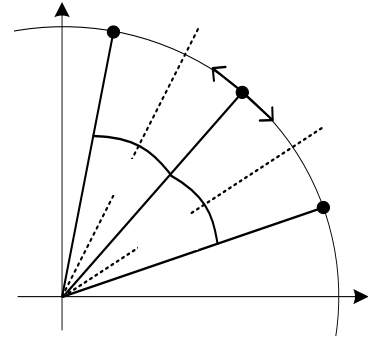
Slika 5.2

$$X = \frac{AT}{2} \cos(\theta + \Phi_k), \quad Y = \frac{AT}{2} \sin(\theta + \Phi_k),$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) = \theta + \Phi_k.$$

Prilikom odlučivanja dolazi do greške ukoliko je $|\theta|$ veći od polovine rastojanja između susednih simbola (slika 5.3), odnosno:

$$|\theta| < \frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{M}{\pi}. \quad (30 \text{ bodova})$$



Slika 5.3

- c) Za BPSK i korelacioni prijemnik prilagođen na oba talasna oblika (slika 5.4), polovina rastojanja između mogućih nivoa u tački A je:

$$d = \frac{AT \cos \theta - (-AT \cos \theta)}{2} = AT \cos \theta,$$

Kada nema fazne greške ($\theta = 0$), važi:

$$d = AT.$$

Verovatnoća greške je:

$$P_E = Q\left(\frac{d}{\sigma_n}\right).$$

Kada nema fazne greške, po uslovu zadatka je:

$$P_E = Q\left(\frac{d}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{AT}{\sigma_n}\right) = 4 \cdot 10^{-4},$$

odakle se dobija:

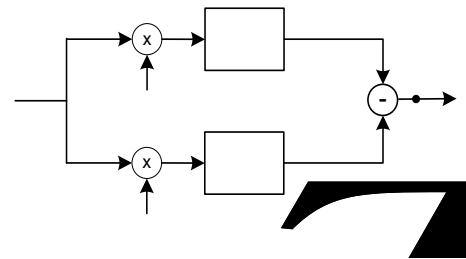
$$\frac{AT}{\sigma_n} = Q^{-1}(4 \cdot 10^{-4}) \approx 3.35,$$

Ugao θ za koji se dobija verovatnoća greške od $4 \cdot 10^{-3}$ se dobija iz jednačine:

$$\frac{AT}{\sigma_n} \cos \theta = Q^{-1}(4 \cdot 10^{-3}) \approx 2.65 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2.65}{3.35} = 0.79,$$

odnosno,

$$\theta \approx 37^\circ. \quad (35 \text{ bodova})$$



Slika 5.4

1 Analiza signala i sistema

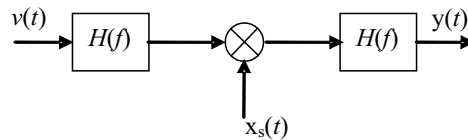
Signals and Systems

Zadatak:

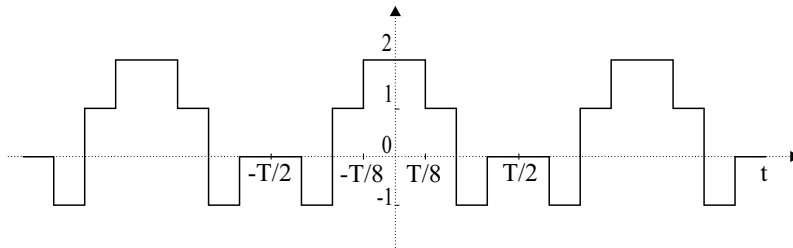
Odrediti izlazni signal $y(t)$ sistema datog na slici 1, ako se na njegov ulaz dovede periodični signal $v(t)$. Deo signala $v(t)$ je dat na slici 2. Prenosna karakteristika bloka $H(f)$ je ista kao i kola datog na slici 3. Signal $x_s(t)$ jednak je $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Pri proračunu zanemariti sve komponente signala koje su oslabljene za više od $25dB$ u bloku $H(f)$. Brojne vrednosti su: $T = 10ms$, $R_1 = 100k\Omega$, $R_2 = 10k\Omega$, $C_1 = 10nF$ i $C_2 = 100nF$.

Problem:

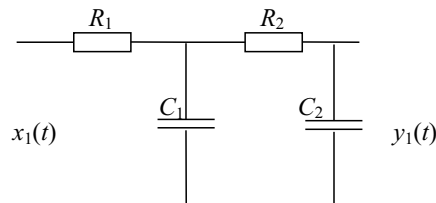
Find the output signal $y(t)$ of the system shown in the Fig. 1 if the input signal is the periodic signal $v(t)$. A short part of the input signal $v(t)$ is shown in the Fig. 2. Block $H(f)$ has the same transfer function as the circuit shown in the Fig. 3. Signal $x_s(t)$ is given by $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. All signal components attenuated more than $25dB$ in the $H(f)$ block should be disregarded. Numeric values are: $T = 10ms$, $R_1 = 100k\Omega$, $R_2 = 10k\Omega$, $C_1 = 10nF$ and $C_2 = 100nF$.



Slika-(Figure) 1:



Slika-(Figure) 2:



Slika-(Figure) 3:

Rešenje:

Signal $v(t)$ se može predstaviti kao zbir signala $v_1(t)$ i $v_2(t)$ gde su:

$$v_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_1(t - nT) \quad (1)$$

$$v_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_2(t - nT/2) \quad (2)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/4 \\ -1 & T/4 < |t| \leq T/2 \\ 0 & T/2 < |t| \end{cases} \quad (3)$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/8 \\ 0 & T/8 < |t| \end{cases} \quad (4)$$

Tako da je njegov spektar:

$$V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{1n} \delta(f - \frac{n}{T}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{2n} \delta(f - \frac{2n}{T}) \quad (5)$$

gde su:

$$V_{1n} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}} & n \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$V_{2n} = \frac{1}{2} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}} \quad (7)$$

(40 poena)

Prenosna kka bloka označenog sa $H(f)$ je:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega(C_1R_1 + C_2R_2 + C_2R_1) + (j\Omega)^2C_1R_1C_2R_2} \quad (8)$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 10^{-6}\Omega^2 + j\Omega 0.0120} \quad (9)$$

(20 poena)

Od interesa su nam samo vredonosti prenosne kka $H(f)$ na celobrojnim umnošcima učestanosti $1/T = 100Hz$.

$$H(0) = 1$$

$$H(2\pi \cdot 100) = 0.1322 \cdot e^{-j1.4907}$$

$$H(2\pi \cdot 200) = 0.0663 \cdot e^{-j1.6092} \text{ slabljenje } 23.5dB$$

$$H(2\pi \cdot 300) = 0.0439 \cdot e^{-j1.6832} \text{ slabljenje } 27.1dB$$

Znači komponente od interesa su na 0, 100 i 200 Hz sve ostale zanemarujemo po uslovu zadatka.

Spektar signal na izlazu prvog bloka označenog sa $H(f)$ je:

$$X(f) = \frac{0.0663}{\pi} \cdot e^{j1.6092} \delta(f + 2/T) + \frac{0.1322}{\pi} \cdot e^{j1.4907} \delta(f + 1/T) + \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{0.1322}{\pi} \cdot e^{-j1.4907} \delta(f - 1/T) + \frac{0.0663}{\pi} \cdot e^{-j1.6092} \delta(f - 2/T) \quad (11)$$

(20 poena)

Spektar signala nakon odabiranja je:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{sn} \delta(f - \frac{n}{T}) \quad (12)$$

gde je

$$X_{sn} = 2 \frac{0.0663}{\pi} \cos(1.6092) + 2 \frac{0.1322}{\pi} \cos(1.4907) + \frac{1}{2} = 0.5051 \quad (13)$$

(10 poena)

Spektar izlaznog signala $y(t)$ je dat sa:

$$X(f) = X_{sn} (0.0663 \cdot e^{j1.6092} \delta(f + 2/T) + 0.1322 \cdot e^{j1.4907} \delta(f + 1/T) + \quad (14)$$

$$\delta(f) + 0.1322 \cdot e^{-j1.4907} \delta(f - 1/T) + 0.0663 \cdot e^{-j1.6092} \delta(f - 2/T)) \quad (15)$$

Sve komponente koje su oslabjene za više od $25dB$ su zanemarene. Traženi signal je:

$$y(t) = 0.5051 + 0.1335 \cos(\frac{2\pi}{T}t - 1.4907) + 0.0670 \cos(\frac{4\pi}{T}t - 1.6092) \quad (16)$$

(10 poena)

2. Statistička teorija telekomunikacija Statistical theory of communications

Zadatak:

Poasonov slučajni proces $\mathbf{x}(t)$ sa uniformnom gustom tačaka λ definisan je kao stohastički proces sa nezavisnim priraštajima takav da je za svako $t_1 > t_2$ priraštaj $\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)$ Poasonova slučajna promenljiva $P\{\lambda(t_1 - t_2)\}$. Pri tome je $\mathbf{x}(0) = 0$.

- a) Pokazati da je srednja vrednost ovog procesa (očekivanje) $\eta_x(t) = E(\mathbf{x}(t)) = \lambda \cdot t$, a autokorelaciona funkcija:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

- b) Neka su poznati srednja vrednost $\eta_x(t)$ i autokorelaciona funkcija $R_{xx}(t_1, t_2)$ nekog slučajnog procesa $\mathbf{x}(t)$. Ovaj slučajni proces se propušta kroz idealni diferencijator, na čijem izlazu se dobija slučajni proces $\mathbf{y}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$. Odrediti srednju vrednost $\eta_y(t)$ i autokorelacionu funkciju $R_{yy}(t_1, t_2)$ procesa $\mathbf{y}(t)$.
- c) Proces $\mathbf{z}(t)$ je slučajni proces koji se sastoji od delta impulsa koji deluju u slučajnim momentima, a gustina impulsa je konstantna tokom vremena i iznosi λ . Odrediti srednju vrednost i autokorelacionu funkciju ovog procesa. Da li je ovo stacionaran proces u širem smislu?

Problem:

Poisson stochastic process $\mathbf{x}(t)$ with uniform random points' density λ is stochastic process with independent increments. The increment $\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)$, for every $t_1 > t_2$, is Poisson distributed random variable $P\{\lambda(t_1 - t_2)\}$. Besides, $\mathbf{x}(0) = 0$.

- a) Show that the expected value of process $\mathbf{x}(t)$ is $\eta_x(t) = E(\mathbf{x}(t)) = \lambda \cdot t$ and autocorrelation:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

- b) Stochastic process $\mathbf{x}(t)$ forms an input to the ideal differentiator. Expected value $\eta_x(t)$ and autocorrelation $R_{xx}(t_1, t_2)$ of this process are given. Process $\mathbf{y}(t)$ forms an output of ideal differentiator. Find the expected value $\eta_y(t)$ and autocorrelation $R_{yy}(t_1, t_2)$ of this process.
- c) Stochastic process $\mathbf{z}(t)$ is defined to be a series of Dirac (delta) impulses whose occurrences are random points in time. Density λ of these points is uniform. Find the expected value and autocorrelation of process $\mathbf{z}(t)$. Is this a wide sense stationary process?

2. Statistička teorija telekomunikacija

Rešenje:

- a) Zbog $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)$, slučajna promenljiva $\mathbf{x}(t)$ je raspoređena prema Poasonovoj raspodeli sa parametrom $\lambda \cdot t$. Srednja vrednost i varijansa Poasonove raspodele iznose $E(x(t)) = \eta_{x(t)} = \sigma_{x(t)}^2 = \lambda \cdot t$. Srednja kvadratna vrednost iznosi $E(x^2(t)) = E^2(x(t)) + \sigma_{x(t)}^2 = \lambda^2 \cdot t^2 + \lambda \cdot t$. Autokorelacija $R_{xx}(t_1, t_2)$ kada je $t_1 < t_2$ se može odrediti na sledeći način:

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1)[x(t_2) - x(t_1)]\} \\ &= E(x^2(t_1)) + E(x(t_1))E(x(t_2) - x(t_1)) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1(\lambda(t_2 - t_1)) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 \end{aligned}$$

U toku izvođenja iskorišćena je činjenica da su slučajne promenljive $x(t_1)$ i $x(t_2) - x(t_1)$ međusobno nezavisne, tako da je očekivanje njihovog proizvoda jednako proizvodu njihovih očekivanja.

Analogno bi se pod pretpostavkom da je $t_1 > t_2$ dobio rezultat $R_{xx}(t_1, t_2) = \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2$

- b) Kako je $y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$, pod pretpostavkom da je $E(x(t)) = \eta_x(t)$, lako se utvrđuje da važi

$$\eta_y(t) = E(y(t)) = E\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E(x(t + \Delta t)) - E(x(t))}{\Delta t} = \frac{d\eta_x(t)}{dt}$$

Takođe je autokorelacija

$$\begin{aligned} R_{yy}(t_1, t_2) &= E(y(t_1)y(t_2)) = E\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \cdot \frac{x(t_2 + \Delta t) - x(t_2)}{\Delta t}\right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_{xx}(t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) - R_{xx}(t_1 + \Delta t, t_2) - R_{xx}(t_1, t_2 + \Delta t) + R_{xx}(t_1, t_2)}{(\Delta t)^2} = \frac{\partial^2 R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \end{aligned}$$

- c) Proces $\mathbf{z}(t)$ opisan kao povorka Dirakovih impulsa u slučajnim momentima može se dobiti na izlazu idealnog diferencijatora ako na njegovom ulazu deluje Poasonov proces $\mathbf{x}(t)$. Obzirom da je očekivanje procesa $\mathbf{x}(t)$ izračunato u delu pod a) i iznosi

$$E(x(t)) = \eta_{x(t)} = \lambda \cdot t, \text{ očekivanje procesa } \mathbf{z}(t) \text{ iznosi } \eta_z(t) = \frac{d\eta_x(t)}{dt} = \lambda. \text{ Autokorelacija}$$

procesa $\mathbf{x}(t)$ je takođe izračunata pod a) i iznosi $R_{xx}(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$.

Parcijalni izvod autokorelacije po t_2 iznosi

$$\frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \lambda^2 t_1 + \lambda U(t_1 - t_2), \text{ gde je sa } U(\cdot) \text{ označena Hevisajdova funkcija. Ako se sada}$$

izračuna parcijalni izvod po t_1 , dobija se autokorelacija procesa $\mathbf{z}(t)$

$$R_{zz}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} R_{xx}(t_1, t_2) = \lambda^2 + \lambda \delta(t_1 - t_2)$$

Kao što se može videti, očekivanje nije funkcija vremena, a autokorelacija je funkcija $t_1 - t_2$, tako da je $\mathbf{z}(t)$ stacionaran u širem smislu.

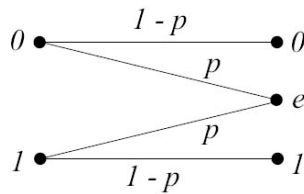
3. Teorija informacija i komunikacija Information and Communications Theory

Zadatak

Posmatra se kodovan prenos informacija upotrebom binarnog zaštitnog koda C dužine n putem binarnog kanala sa brisanjem (BEC; model kanala dat je na slici), pri čemu je izbor svake kodne reči jednakoverovatan.

Neka je $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ slučajna promenjiva (s.p) koja odgovara odabranoj kodnoj reči na ulazu u kanal, $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ s.p. koja odgovara sekvenci observiranoj na izlazu kanala i neka oznaka i u indeksu označava s.p. i -te vrednosti u sekvenci, a oznaka $\sim i$ označava s.p. koja odgovara vektoru koji sadrži sve osim i -te vrednosti u sekvenci (npr. \mathbf{Y}_i i $\mathbf{Y}_{\sim i}=(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_n)$).

O bitu X_i poslane kodne reči odlučuje se ML kriterijumom na osnovu informacije Y_i (opservacija kroz zavisnost koju unosi kanal) i informacije $\mathbf{Y}_{\sim i}$ (opservacija kroz zavisnost koju unosi zaštitni kod). Pokazati da je uslovna neizvesnost (entropija) primljenog bita X_i ako je poznata s.p. $\mathbf{Y}_{\sim i}$ (tzv. ekstrinzična informacija) $H(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i}) = \Pr\{x_i^{\text{ML}} = e\}$, gde x_i^{ML} označava ML procenu vrednosti s.p. X_i .



Slika 1 (Figure 1). Model BEC kanala (BEC Channel Model)

(Pomoć: Razmotriti šta se dešava ako je primenjeni kod C npr. jednostavan repeticioni kod dužine n).

Problem

Transmission of information using binary channel code C of length n over Binary Erasure Channel (BEC, see Figure 1) is considered, where every transmitted codeword is selected uniformly (with equal probability).

Let $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ denote random variable (r.v.) that corresponds to a codeword selected at the channel input, $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ be a r.v. that corresponds to an observed sequence at the channel output and let subscript i denote i -th r.v. in the sequence, and subscript $\sim i$ denote the vector of all but i -th r.v. in the sequence (e.g. \mathbf{Y}_i and $\mathbf{Y}_{\sim i}=(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_n)$).

The value of r.v. X_i is decided using ML (Maximum Likelihood) criterion based on observed values of Y_i (observation through channel introduced dependancy) and $\mathbf{Y}_{\sim i}$ (observation through channel code introduced dependancy). Show that the average conditional uncertainty (entropy) of the received bit X_i given that $\mathbf{Y}_{\sim i}$ (i.e. *Extrinsic Information*) is known $H(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i}) = \Pr\{x_i^{\text{ML}} = e\}$, where x_i^{ML} denotes ML estimate of the r.v. X_i .

(Hint: Consider the situation where the code C is simple repetition code of length n).

Rešenje

Tražena vrednost je uslovna neizvesnost (entropija) primljenog bita X_i ako je poznata s.p. $\mathbf{Y}_{\sim i}$ (tzv. ekstrinzična informacija) $H(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i})$. Po definiciji:

$$H(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i}) = \sum_{\mathbf{Y}_{\sim i}} p(\mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) \sum_{X_i} p(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) \log\left(\frac{1}{p(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i})}\right) \quad (1)$$

Po prijemu sekvence $\mathbf{y}_{\sim i} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ na izlazu BEC kanala, čija svaka komponenta može imati vrednost iz skupa $\{0, 1, e\}$, zanimaju nas verovatnoće $p(X_i = 0 | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i})$ odnosno $p(X_i = 1 | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i})$. Suštinska primedba ovde je da ove verovatnoće mogu da imaju tri moguća para vrednosti:

$p(X_i = 0 | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) = 1$ i $p(X_i = 1 | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) = 0$, kada na osnovu $\mathbf{y}_{\sim i}$ možemo zaključiti $X_i = 0$,

$p(X_i = 0 | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) = 0$ i $p(X_i = 1 | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) = 1$, kada na osnovu $\mathbf{y}_{\sim i}$ možemo zaključiti $X_i = 1$,

$p(X_i = 0 | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) = 1/2$ i $p(X_i = 1 | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) = 1/2$, kada na osnovu $\mathbf{y}_{\sim i}$ ne možemo saznati X_i .

Kod BEC kanala, gornje verovatnoće je bilo lako odrediti jer na osnovu $\mathbf{y}_{\sim i}$ ili pouzdano znamo vrednost X_i ili uopšte nemamo informaciju o vrednosti X_i . Optimalan (ML) dekodler je optimalan alat za određivanje X_i za poznato $\mathbf{y}_{\sim i}$. On vraća tačnu vrednost poslanog X_i samo ako pri prenosu izabrane kodne reči \mathbf{X} kroz BEC kanal, nisu obrisane pozicije koje odgovaraju nosećem skupu (pozicije jedinica) bilo koje kodne reči koda C .

U prva dva slučaja, unutrašnja suma (po vrednostima X_i) u izrazu (1) jednaka je 0, a u trećem slučaju je jednaka 1, tako da izraz (1) postaje:

$$H(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i}) = \sum_{\mathbf{Y}_{\sim i}: X_i^{\text{ML}} = e} p(\mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i}) = \Pr\{x_i^{\text{ML}} = e\} \quad (2)$$

Dodatak: Ukoliko neko na osnovu predložene pomoći diskutuje slučaj kada je C repeticioni kod, vredi nagraditi trud, ako se pomenu neke od sledećih primedbi.

Repeticioni kod dužine n ima samo dve kodne reči: n -torku jedinica i n -torku nula. Prijemni vektor $\mathbf{Y}_{\sim i}$ posmatramo u dva slučaja: ili je $\mathbf{y}_{\sim i}$ $n-1$ -torka čine su sve vrednosti jednake e , ili je bar jedna komponenta $n-1$ -torke različita od e (primetiti da ako je više komponenti različito od e , sve moraju biti konzistentne tj. ili su sve jednake 0 ili su sve jednake 1). U prvom slučaju vrednost X_i ostaje nepoznata i po prijemu $\mathbf{y}_{\sim i}$ (slučaj 3 iz rešenja gore), dok u drugom slučaju vrednost X_i možemo pouzdano odrediti na osnovu $\mathbf{y}_{\sim i}$ (slučaj 2 iz rešenja gore). Moguće je i izračunati da u slučaju repeticionog koda dužine n važi:

$H(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i}) = \Pr\{x_i^{\text{ML}} = e\} = p^{n-1}$, gde je p verovatnoća brisanja (parametar) BEC kanala.

Uputstvo za bodovanje:

Ispisivanje jednačine (1): 30 bodova.

Komentarisanje mogućih vrednosti $p(X_i | \mathbf{Y}_{\sim i} = \mathbf{y}_{\sim i})$: 40 bodova.

Dolazak do jednačine (2): 30 bodova.

Za dodatak bi trebalo dati do 50 bodova, ako nije uopšte praćen glavni tok rešenja. U suprotnom, doprinos glavnog toka rešenja i dodatka treba kombinovati po slobodnoj volji.

PRILOG

Za izračunavanje verovatnoće greške često se koristi tzv. Q funkcija. Njen definicioni izraz je:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (\text{P1})$$

Takođe se koriste i funkcija greške $\text{erf}(x)$ i njena komplementarna funkcija $\text{erfc}(x)$. One su definisane kao:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad (\text{P2})$$

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x). \quad (\text{P3})$$

Relacija između ovih funkcija data je sa:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{P4})$$

Vrednosti Q -funkcije date su u tabeli.

Osnovne osobine Q -funkcije su:

$$Q(-\infty) = 1, \quad Q(0) = 0,5, \quad Q(\infty) = 0. \quad (\text{P5})$$

Za izračunavanje vrednosti Q funkcije, često se koriste i aproksimativni izrazi kao što su:

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} < Q(x) < \frac{1}{x \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (\text{P6})$$

Za vrednosti argumenta $x > 2$ aproksimativni izrazi daju zadovoljavajuću tačnost.

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |
| 0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| 0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| 0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| 0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| 0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| 0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| 0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| 0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| 0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| 1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| 1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| 1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| 1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| 1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| 1.5 | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| 1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| 1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| 1.8 | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| 1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| 2.0 | 2.2750e-02 | 2.2216e-02 | 2.1692e-02 | 2.1178e-02 | 2.0675e-02 | 2.0182e-02 | 1.9699e-02 | 1.9226e-02 | 1.8763e-02 | 1.8309e-02 |
| 2.1 | 1.7864e-02 | 1.7429e-02 | 1.7003e-02 | 1.6586e-02 | 1.6177e-02 | 1.5778e-02 | 1.5386e-02 | 1.5003e-02 | 1.4629e-02 | 1.4262e-02 |
| 2.2 | 1.3903e-02 | 1.3553e-02 | 1.3209e-02 | 1.2874e-02 | 1.2545e-02 | 1.2224e-02 | 1.1911e-02 | 1.1604e-02 | 1.1304e-02 | 1.1011e-02 |
| 2.3 | 1.0724e-02 | 1.0444e-02 | 1.0170e-02 | 9.9031e-03 | 9.6419e-03 | 9.3867e-03 | 9.1375e-03 | 8.8940e-03 | 8.6563e-03 | 8.4242e-03 |
| 2.4 | 8.1975e-03 | 7.9763e-03 | 7.7603e-03 | 7.5494e-03 | 7.3436e-03 | 7.1428e-03 | 6.9469e-03 | 6.7557e-03 | 6.5691e-03 | 6.3872e-03 |
| 2.5 | 6.2097e-03 | 6.0366e-03 | 5.8677e-03 | 5.7031e-03 | 5.5426e-03 | 5.3861e-03 | 5.2336e-03 | 5.0849e-03 | 4.9400e-03 | 4.7988e-03 |
| 2.6 | 4.6612e-03 | 4.5271e-03 | 4.3965e-03 | 4.2692e-03 | 4.1453e-03 | 4.0246e-03 | 3.9070e-03 | 3.7926e-03 | 3.6811e-03 | 3.5726e-03 |
| 2.7 | 3.4670e-03 | 3.3642e-03 | 3.2641e-03 | 3.1667e-03 | 3.0720e-03 | 2.9798e-03 | 2.8901e-03 | 2.8028e-03 | 2.7179e-03 | 2.6354e-03 |
| 2.8 | 2.5551e-03 | 2.4771e-03 | 2.4012e-03 | 2.3274e-03 | 2.2557e-03 | 2.1860e-03 | 2.1182e-03 | 2.0524e-03 | 1.9884e-03 | 1.9262e-03 |
| 2.9 | 1.8658e-03 | 1.8071e-03 | 1.7502e-03 | 1.6948e-03 | 1.6411e-03 | 1.5889e-03 | 1.5382e-03 | 1.4890e-03 | 1.4412e-03 | 1.3949e-03 |
| 3.0 | 1.3499e-03 | 1.3062e-03 | 1.2639e-03 | 1.2228e-03 | 1.1829e-03 | 1.1442e-03 | 1.1067e-03 | 1.0703e-03 | 1.0350e-03 | 1.0008e-03 |
| 3.1 | 9.6760e-04 | 9.3544e-04 | 9.0426e-04 | 8.7403e-04 | 8.4474e-04 | 8.1635e-04 | 7.8885e-04 | 7.6219e-04 | 7.3638e-04 | 7.1136e-04 |
| 3.2 | 6.8714e-04 | 6.6367e-04 | 6.4095e-04 | 6.1895e-04 | 5.9765e-04 | 5.7703e-04 | 5.5706e-04 | 5.3774e-04 | 5.1904e-04 | 5.0094e-04 |
| 3.3 | 4.8342e-04 | 4.6648e-04 | 4.5009e-04 | 4.3423e-04 | 4.1889e-04 | 4.0406e-04 | 3.8971e-04 | 3.7584e-04 | 3.6243e-04 | 3.4946e-04 |
| 3.4 | 3.3693e-04 | 3.2481e-04 | 3.1311e-04 | 3.0179e-04 | 2.9086e-04 | 2.8029e-04 | 2.7009e-04 | 2.6023e-04 | 2.5071e-04 | 2.4151e-04 |

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 3.5 | 2.3263e-04 | 2.2405e-04 | 2.1577e-04 | 2.0778e-04 | 2.0006e-04 | 1.9262e-04 | 1.8543e-04 | 1.7849e-04 | 1.7180e-04 | 1.6534e-04 |
| 3.6 | 1.5911e-04 | 1.5310e-04 | 1.4730e-04 | 1.4171e-04 | 1.3632e-04 | 1.3112e-04 | 1.2611e-04 | 1.2128e-04 | 1.1662e-04 | 1.1213e-04 |
| 3.7 | 1.0780e-04 | 1.0363e-04 | 9.9611e-05 | 9.5740e-05 | 9.2010e-05 | 8.8417e-05 | 8.4957e-05 | 8.1624e-05 | 7.8414e-05 | 7.5324e-05 |
| 3.8 | 7.2348e-05 | 6.9483e-05 | 6.6726e-05 | 6.4072e-05 | 6.1517e-05 | 5.9059e-05 | 5.6694e-05 | 5.4418e-05 | 5.2228e-05 | 5.0122e-05 |
| 3.9 | 4.8096e-05 | 4.6148e-05 | 4.4274e-05 | 4.2473e-05 | 4.0741e-05 | 3.9076e-05 | 3.7475e-05 | 3.5936e-05 | 3.4458e-05 | 3.3037e-05 |
| 4.0 | 3.1671e-05 | 3.0359e-05 | 2.9099e-05 | 2.7888e-05 | 2.6726e-05 | 2.5609e-05 | 2.4536e-05 | 2.3507e-05 | 2.2518e-05 | 2.1569e-05 |
| 4.1 | 2.0658e-05 | 1.9783e-05 | 1.8944e-05 | 1.8138e-05 | 1.7365e-05 | 1.6624e-05 | 1.5912e-05 | 1.5230e-05 | 1.4575e-05 | 1.3948e-05 |
| 4.2 | 1.3346e-05 | 1.2769e-05 | 1.2215e-05 | 1.1685e-05 | 1.1176e-05 | 1.0689e-05 | 1.0221e-05 | 9.7736e-06 | 9.3447e-06 | 8.9337e-06 |
| 4.3 | 8.5399e-06 | 8.1627e-06 | 7.8015e-06 | 7.4555e-06 | 7.1241e-06 | 6.8069e-06 | 6.5031e-06 | 6.2123e-06 | 5.9340e-06 | 5.6675e-06 |
| 4.4 | 5.4125e-06 | 5.1685e-06 | 4.9350e-06 | 4.7117e-06 | 4.4979e-06 | 4.2935e-06 | 4.0980e-06 | 3.9110e-06 | 3.7322e-06 | 3.5612e-06 |
| 4.5 | 3.3977e-06 | 3.2414e-06 | 3.0920e-06 | 2.9492e-06 | 2.8127e-06 | 2.6823e-06 | 2.5577e-06 | 2.4386e-06 | 2.3249e-06 | 2.2162e-06 |
| 4.6 | 2.1125e-06 | 2.0133e-06 | 1.9187e-06 | 1.8283e-06 | 1.7420e-06 | 1.6597e-06 | 1.5810e-06 | 1.5060e-06 | 1.4344e-06 | 1.3660e-06 |
| 4.7 | 1.3008e-06 | 1.2386e-06 | 1.1792e-06 | 1.1226e-06 | 1.0686e-06 | 1.0171e-06 | 9.6796e-07 | 9.2113e-07 | 8.7648e-07 | 8.3391e-07 |
| 4.8 | 7.9333e-07 | 7.5465e-07 | 7.1779e-07 | 6.8267e-07 | 6.4920e-07 | 6.1731e-07 | 5.8693e-07 | 5.5799e-07 | 5.3043e-07 | 5.0418e-07 |
| 4.9 | 4.7918e-07 | 4.5538e-07 | 4.3272e-07 | 4.1115e-07 | 3.9061e-07 | 3.7107e-07 | 3.5247e-07 | 3.3476e-07 | 3.1792e-07 | 3.0190e-07 |
| 5.0 | 2.8665e-07 | 2.7215e-07 | 2.5836e-07 | 2.4524e-07 | 2.3277e-07 | 2.2091e-07 | 2.0963e-07 | 1.9891e-07 | 1.8872e-07 | 1.7903e-07 |
| 5.1 | 1.6983e-07 | 1.6108e-07 | 1.5277e-07 | 1.4487e-07 | 1.3737e-07 | 1.3024e-07 | 1.2347e-07 | 1.1705e-07 | 1.1094e-07 | 1.0515e-07 |
| 5.2 | 9.9644e-08 | 9.4420e-08 | 8.9462e-08 | 8.4755e-08 | 8.0288e-08 | 7.6050e-08 | 7.2028e-08 | 6.8212e-08 | 6.4592e-08 | 6.1158e-08 |
| 5.3 | 5.7901e-08 | 5.4813e-08 | 5.1884e-08 | 4.9106e-08 | 4.6473e-08 | 4.3977e-08 | 4.1611e-08 | 3.9368e-08 | 3.7243e-08 | 3.5229e-08 |
| 5.4 | 3.3320e-08 | 3.1512e-08 | 2.9800e-08 | 2.8177e-08 | 2.6640e-08 | 2.5185e-08 | 2.3807e-08 | 2.2502e-08 | 2.1266e-08 | 2.0097e-08 |
| 5.5 | 1.8990e-08 | 1.7942e-08 | 1.6950e-08 | 1.6012e-08 | 1.5124e-08 | 1.4283e-08 | 1.3489e-08 | 1.2737e-08 | 1.2026e-08 | 1.1353e-08 |
| 5.6 | 1.0718e-08 | 1.0116e-08 | 9.5479e-09 | 9.0105e-09 | 8.5025e-09 | 8.0224e-09 | 7.5686e-09 | 7.1399e-09 | 6.7347e-09 | 6.3520e-09 |
| 5.7 | 5.9904e-09 | 5.6488e-09 | 5.3262e-09 | 5.0215e-09 | 4.7338e-09 | 4.4622e-09 | 4.2057e-09 | 3.9636e-09 | 3.7350e-09 | 3.5193e-09 |
| 5.8 | 3.3157e-09 | 3.1236e-09 | 2.9424e-09 | 2.7714e-09 | 2.6100e-09 | 2.4579e-09 | 2.3143e-09 | 2.1790e-09 | 2.0513e-09 | 1.9310e-09 |
| 5.9 | 1.8175e-09 | 1.7105e-09 | 1.6097e-09 | 1.5147e-09 | 1.4251e-09 | 1.3407e-09 | 1.2612e-09 | 1.1863e-09 | 1.1157e-09 | 1.0492e-09 |
| 6.0 | 9.8659e-10 | 9.2762e-10 | 8.7209e-10 | 8.1980e-10 | 7.7057e-10 | 7.2423e-10 | 6.8061e-10 | 6.3955e-10 | 6.0091e-10 | 5.6455e-10 |
| 6.1 | 5.3034e-10 | 4.9816e-10 | 4.6788e-10 | 4.3940e-10 | 4.1261e-10 | 3.8741e-10 | 3.6372e-10 | 3.4145e-10 | 3.2051e-10 | 3.0082e-10 |
| 6.2 | 2.8232e-10 | 2.6492e-10 | 2.4858e-10 | 2.3322e-10 | 2.1879e-10 | 2.0523e-10 | 1.9249e-10 | 1.8052e-10 | 1.6929e-10 | 1.5873e-10 |
| 6.3 | 1.4882e-10 | 1.3952e-10 | 1.3078e-10 | 1.2258e-10 | 1.1488e-10 | 1.0766e-10 | 1.0088e-10 | 9.4514e-11 | 8.8544e-11 | 8.2943e-11 |
| 6.4 | 7.7688e-11 | 7.2760e-11 | 6.8137e-11 | 6.3802e-11 | 5.9737e-11 | 5.5925e-11 | 5.2351e-11 | 4.9001e-11 | 4.5861e-11 | 4.2918e-11 |
| 6.5 | 4.0160e-11 | 3.7575e-11 | 3.5154e-11 | 3.2885e-11 | 3.0759e-11 | 2.8769e-11 | 2.6904e-11 | 2.5158e-11 | 2.3522e-11 | 2.1991e-11 |
| 6.6 | 2.0558e-11 | 1.9216e-11 | 1.7960e-11 | 1.6784e-11 | 1.5684e-11 | 1.4655e-11 | 1.3691e-11 | 1.2790e-11 | 1.1947e-11 | 1.1159e-11 |
| 6.7 | 1.0421e-11 | 9.7312e-12 | 9.0862e-12 | 8.4832e-12 | 7.9193e-12 | 7.3923e-12 | 6.8996e-12 | 6.4391e-12 | 6.0088e-12 | 5.6067e-12 |
| 6.8 | 5.2310e-12 | 4.8799e-12 | 4.5520e-12 | 4.2457e-12 | 3.9597e-12 | 3.6925e-12 | 3.4430e-12 | 3.2101e-12 | 2.9926e-12 | 2.7896e-12 |
| 6.9 | 2.6001e-12 | 2.4233e-12 | 2.2582e-12 | 2.1042e-12 | 1.9605e-12 | 1.8264e-12 | 1.7014e-12 | 1.5847e-12 | 1.4759e-12 | 1.3744e-12 |
| 7.0 | 1.2798e-12 | 1.1916e-12 | 1.1093e-12 | 1.0327e-12 | 9.6120e-13 | 8.9459e-13 | 8.3251e-13 | 7.7467e-13 | 7.2077e-13 | 6.7056e-13 |

Vrednosti Q funkcije