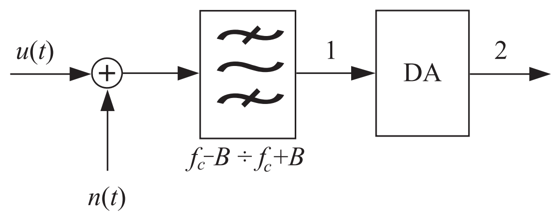
Analogne modulacije

Na slici je data blok šema prijemnika KAM signala. Na ulazu prijemnika postoji aditivni beli Gausov šum spektralne gustine srednje snage $p_N = N_0/2$. Na ulaz prijemnika dolazi KAM signal čiji nosilac ima amplitudu U_c i učestanost f_c, a indeks modulacije ima vrednost m_0. Modulišući signal je test ton učestanosti f_m ($m(t) = \cos(2\pi f_m t)$) pri čemu je $f_m << f_c$. Odrediti odnos signal šum (SNR) u tačkama 1 i 2. Važe sledeće aproksimacije:

- detektor anvelope (DA) i pojasni filtar prijemnika su idealani,
- vrednost B je dovoljno velika da prolazi celokupni KAM signal,
- amplituda šuma je mnogo manja od amplitude nosioca U_c,
- kod KAM signala korisni signal čine samo bočni opsezi.



Pomoć: $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$

Rešenje:

KAM signal:

$$\begin{aligned} u_{KAM}(t) &= U_c\left(1 + m_0\cos(2\pi f_m t)\right)\cos(2\pi f_c t) \\ &= U_c\cos(2\pi f_c t) + \frac{U_c m_0}{2}\cos(2\pi(f_c - f_m)t) + \frac{U_c m_0}{2}\cos(2\pi(f_c + f_m)t) \end{aligned}$$

Tako da je snaga KAM signala:

$$P_{S1} = \frac{(U_c m_0/2)^2}{2} + \frac{(U_c m_0/2)^2}{2} = \frac{U_c^2 m_0^2}{4}$$

Snaga šuma u tački 1 je:

$$P_{N1} = 2\int_{f_c - B}^{f_c + B} p_N df = 4 p_N B = 2 N_0 B$$

Odnos signal šum u tački jedan je:

$$SNR_1 = \frac{P_{S1}}{P_{N1}} = \frac{\frac{U_c^2 m_0^2}{4}}{2N_0 B} = \frac{U_c^2 m_0^2}{8 N_0 B}$$

Šum u tački 1 ima oblik:

$$n_1(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

a signal

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \left(U_c + m_0 U_c\cos(2\pi f_m t) + n_c(t)\right)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \\ &= a(t)\cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{\left(U_c + m_0 U_c\cos(2\pi f_m t) + n_c(t)\right)^2 + n_s^2(t)} \\ &= \left(U_c + m_0 U_c\cos(2\pi f_m t)\right)\left(1 + \frac{2n_c(t)}{U_c + m_0 U_c\cos(2\pi f_m t)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_c^2(t)}{(U_c + m_0 U_c\cos(2\pi f_m t))^2} + \frac{n_s^2(t)}{(U_c + m_0 U_c\cos(2\pi f_m t))^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pošto je šum mnogo manji od signala odnsno $|n_c(t)| << U_c$ i $|n_s(t)| << U_c$ onda važi:

$$
\begin{aligned}
a(t) &\approx (U_c + m_0 U_c \cos(2\pi f_m t))\left(1 + \frac{2n_c(t)}{U_c + m_0 U_c \cos(2\pi f_m t)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\approx (U_c + m_0 U_c \cos(2\pi f_m t))\left(1 + \frac{n_c(t)}{U_c + m_0 U_c \cos(2\pi f_m t)}\right) \\
&\approx U_c + m_0 U_c \cos(2\pi f_m t) + n_c(t)
\end{aligned}
$$

Snaga korisnog signala u tački 2 ima vrednost

$$P_{S2} = \frac{U_c^2 m_0^2}{2}$$

a snaga šuma:

$$P_{N2} = 2\int_{-B}^{B} p_N df = 4p_N B = 2N_0 B$$

te je

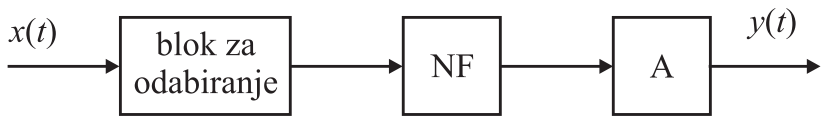
$$SNR_2 = \frac{P_{S2}}{P_{N2}} = \frac{U_c^2 m_0^2}{4N_0 B}$$

Signali i sistemi

Naći odziv sistema sa slike na signal $x(t)$ čiji je spektar

$$X(f) = \begin{cases} \cos^2(\frac{\pi}{6}f) & |f| \leq 3\text{Hz} \\ 0 & |f| > 3\text{Hz} \end{cases}$$

U bloku za odabiranje postoji greška, pa je vrednost svakog drugog odbirka dva puta manja od vrednosti koja bi bila u slučaju da je blok za odabiranje ispravan (vrednosti preostalih odbiraka su korektne). Učestanost odabiranja je $f_s = 6$ Hz. Nisko frekvencijski (NF) filtar je idealan, granične učestanosti $f_g = 3$ Hz. Pojačanje pojačivača (A) je 2.



Rešenje:
Signal kojim se vrši odabiranje se može prikazati kao:

$$s_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT_s) + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT_s - T_s)$$

ili

$$s_2(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT_s) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT_s - T_s)$$

Spektar signala $s_1(t)$ je:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \frac{1}{2T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{2Ts}) + \frac{1}{4Ts}e^{-j2\pi f T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{2Ts}) \\ &= \frac{1}{2T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{k}{2T_s}T_s}\right)\delta(f - \frac{k}{2Ts}) \\ &= \frac{f_s}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^k\right)\delta(f - \frac{kf_s}{2}) \end{aligned}$$

odnosno signala $s_2(t)$ je:

$$S_2(f) = \frac{f_s}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + (-1)^k\right)\delta(f - \frac{kf_s}{2})$$

Signal odbiraka se dobija kao $x_{s1}(t) = x(t)s_1(t)$ ili $x_{s2}(t) = x(t)s_2(t)$. Koristeći činjenicu da je $f_s = 6$ Hz, izraz za spektar signala odbiraka je:

$$X_{s1}(f) = 3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^k\right)X(f - 3k)$$

odnosno

$$X_{s2}(f) = 3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + (-1)^k\right)X(f - 3k)$$

Spektar signala x(t) se može predstaviti na sledeći način:

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi}{3}f)) & |f| \leq 3Hz \\ 0 & |f| > 3Hz \end{cases}$$

Pošto NF filtar propušta opseg od -3 do 3 Hz u tom opsegu će biti posmatran i spektar signala odbiraka.

$$\begin{aligned} X_{s1}(f) &= \begin{cases} 9/2X(f) + 3/2X(f-3) & 0 \leq f < 3 \\ 9/2X(f) + 3/2X(f+3) & -3 \leq f < 0 \end{cases} \\ &= \frac{3}{2}(2 + \cos(\frac{\pi}{3}f)) \end{aligned}$$

Slično se dobija za:

$$\begin{aligned} X_{s2}(f) &= \left\{ \begin{array}{ll} 9/2X(f) - 3/2X(f-3) & 0 \leq f < 3 \\ 9/2X(f) - 3/2X(f+3) & -3 \leq f < 0 \end{array} \right. \\ &= \frac{3}{2}(1 + 2\cos(\frac{\pi}{3}f)) \end{aligned}$$

Spektar signala na izlazu sistema je (u slučaju da je signal kojim se vrši odabiranje $s_1(t)$

$$Y_1(f) = \left\{ \begin{array}{ll} 3(2 + \cos(\frac{\pi}{3}f) & |f| \leq 3 \\ 0 & |f| > 3 \end{array} \right.$$

odnosno

$$Y_2(f) = \left\{ \begin{array}{ll} 3(1 + 2\cos(\frac{\pi}{3}f) & |f| \leq 3 \\ 0 & |f| > 3 \end{array} \right.$$

Inverznom furijeovom transformacijom se dobija da je

$$y_1(t) = 36\frac{\sin(6\pi t)}{6\pi t} + 9\frac{\sin(6\pi(t-1/6))}{6\pi(t-1/6)} + 9\frac{\sin(6\pi(t+1/6))}{6\pi(t+1/6)}$$

odnosno

$$y_2(t) = 18\frac{\sin(6\pi t)}{6\pi t} + 18\frac{\sin(6\pi(t-1/6))}{6\pi(t-1/6)} + 18\frac{\sin(6\pi(t+1/6))}{6\pi(t+1/6)}$$

DIGITALNE TELEKOMUNIKACIJE

Zadatak:

Predajnik emituje digitalni signal $s(t) = \sum_k h_i(t - kT)$, $i \in \{1,2\}$, pri čemu su mogući talasni oblici $h_1(t)$ i $h_2(t)$ dati izrazima:

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T/2 \\ 0 & \text{drugde} \end{cases} \text{ i } h_2(t) = \begin{cases} 1 & T/2 \leq t < T \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}$$

Izbor emitovanog talasnog oblika u bilo kom signalizacionom intervalu je nezavisan od prethodnih izbora, a verovatnoće pojedinih izbora su jednake.

Odrediti i skicirati spektralnu gustinu snage emitovanog digitalnog signala.

Rešenje:

Emitovani digitalni signal se može predstaviti u obliku $s(t) = y(t) + \frac{1}{2}$, gde je $y(t) = \sum_k a_k\, x(t - kT)$, pri čemu je a_k slučajna promenljiva (amplituda) sa vrednostima iz skupa {1,-1} sa jednakim verovatnoćama obe vrednosti, a $x(t)$ talasni oblik (elementarni impuls) dat izrazom:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 \le t < T/2 \\ -\dfrac{1}{2} & T/2 \le t < T \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}$$

Autokorelacija po vremenu signala $s(t)$ je:

$$R_s(\tau) = \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} s(t)s(t+\tau)dt = \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} \left(y(t) + \frac{1}{2}\right)\left(y(t+\tau) + \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} y(t)y(t+\tau)dt + \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{4t_0} \int_{-t_0}^{t_0} y(t)dt + \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{4t_0} \int_{-t_0}^{t_0} y(t+\tau)dt + \frac{1}{4}$$

Lako je pokazati da je srednja vrednost po vremenu signala $y(t)$ jednaka nuli (npr. vrednost integrala signala $y(t)$ u svakom signalizacionom intervalu je 0, tako da je integral u intervalu $[-t_0, t_0]$ ograničen, a imenilac teži beskonačnosti), stoga je:

$$R_s(\tau) = R_y(\tau) + \frac{1}{4}$$

Spektralna gustina snage je:

$$S_s(f) = S_y(f) + \frac{1}{4}\delta(f)$$

gde je:

$$S_y(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|X(f)|^2$$

pri čemu je varijansa slučajne amplitude $\sigma_a^2 = 1$ (srednja vrednost je 0), a $|X(f)|^2$ je spektralna gustina energije elementarnog impulsa.

Važi:

$$|X(f)|^2 = \frac{\sin^4\left(\frac{\pi f T}{2}\right)}{(\pi f)^2}$$ (obično maltretiranje sa integralima)

pa je:

$$S_s(f) = \frac{\sin^4\left(\dfrac{\pi f T}{2}\right)}{(\pi f)^2 T} + \frac{1}{4}\delta(f)$$

(Skicu je jednostavno odraditi, prigušena (opadajuća) oscilatorna funkcija, čije su nule u tačkama $f = \frac{2k}{T}$, gde je *k* bilo koji ceo broj uključujući i nulu.)

Statistička teorija telekomunikacija

Dat je slučajan proces $X(t)$ sa nultom srednjom vrednošću i autokorelacionom funkcijom $R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} \ , \ |\tau| \leq T \\ 0 \quad \ , \ inače \end{cases}$. Odrediti srednju vrednost i autokorelaciju slučajnog procesa $S(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(u)du$.

Rešenje:

Srednja vrednost slučajnog procesa $S(t)$ data je sa:

$$E[S(t)] = E\left[\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(u)\, du\right] = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} E[X(u)]\, du = 0 \ . \tag{10}$$

Autokorelacija je po definiciji:

$$R_S(t_1, t_2) = E[S(t_1)S(t_2)] = E\left[\frac{1}{T}\int_{t_1-T}^{t_1} X(u)du \cdot \frac{1}{T}\int_{t_2-T}^{t_2} X(v)dv\right] =$$

$$= E\left[\frac{1}{T^2}\int_{t_1-T}^{t_1}\int_{t_2-T}^{t_2} X(u)X(v)dvdu\right] = \frac{1}{T^2}\int_{t_1-T}^{t_1}\int_{t_2-T}^{t_2} E[X(u)X(v)]dvdu =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{t_1-T}^{t_1}\int_{t_2-T}^{t_2} R_X(u-v)\, dv\, du \ .$$

Smenom $(w = u - v\ ,\ t = u\ ;\ \ |J| = 1)$ prethodni integral postaje:

$$R_S(t_1, t_2) = \frac{1}{T^2}\int_{t_1-T}^{t_1}\int_{t-t_2}^{t-t_2+T} R_X(w)\, dw\, dt \ .$$

Zamenom redosleda integracije dobija se:

$$R_S(t_1, t_2) = \frac{1}{T^2}\int_{t_1-t_2-T}^{t_1-t_2}\int_{t_1-T}^{w+t_2} R_X(w)\, dt\, dw + \frac{1}{T^2}\int_{t_1-t_2}^{t_1-t_2+T}\int_{w+t_2-T}^{t_1} R_X(w)\, dt\, dw =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{t_1-t_2-T}^{t_1-t_2} R_X(w)\int_{t_1-T}^{w+t_2} dt\, dw + \frac{1}{T^2}\int_{t_1-t_2}^{t_1-t_2+T} R_X(w)\int_{w+t_2-T}^{t_1} dt\, dw =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{t_1-t_2-T}^{t_1-t_2} R_X(w)\cdot(w + t_2 - t_1 + T)\, dw +$$

$$+ \frac{1}{T^2}\int_{t_1-t_2}^{t_1-t_2+T} R_X(w)\cdot(t_1 - t_2 + T - w)\, dw \ .$$

Može se uvesti oznaka $\tau = t_1 - t_2$, kao i $R_S(\tau) \triangleq R_S(t_2 + \tau\ , t_2)$ pa se dobija:

$$R_S(\tau) = \frac{1}{T^2}\int_{\tau-T}^{\tau} R_X(w)\cdot(w - \tau + T)\, dw + \frac{1}{T^2}\int_{\tau}^{\tau+T} R_X(w)\cdot(\tau + T - w)\, dw = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{\tau-T}^{\tau+T} R_X(w)\cdot(T - |w - \tau|)\ dw \ .$$

Pošto je funkcija $R_X(w)$ jednaka nuli van intervala $(-T, T)$ razlikuju se tri slučaja za $\tau < 0$.

$\tau \leq -2T$:

U ovom slučaju je $\tau + T \leq -T$ pa su oba integrala u (1) jednaka nuli, tj.

$$R_S(\tau) = 0 \,.$$

$-2T < \tau \leq -T$:

Podintegralna funkcija u prvom sabirku u (1) je jednaka nuli. U drugom se donja granica se može zameniti sa $-T$ jer je nad intervalom $(\tau, -T)$ podintegralna funkcija takođe jednaka nuli. Sledi:

$$R_S(\tau) = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{\tau+T} R_X(w)\cdot(\tau + T - w)\,dw = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{\tau+T}\left(1+\frac{w}{T}\right)\cdot(\tau + T - w)\,dw =$$

$$= \cdots = \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{T} + 2\right)^3 \,.$$

$-T < \tau \leq 0$:

$$R_S(\tau) = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{\tau} R_X(w)\cdot(w + T - \tau)\,dw + \frac{1}{T^2}\int_{\tau}^{0} R_X(w)\cdot(\tau + T - w)\,dw +$$

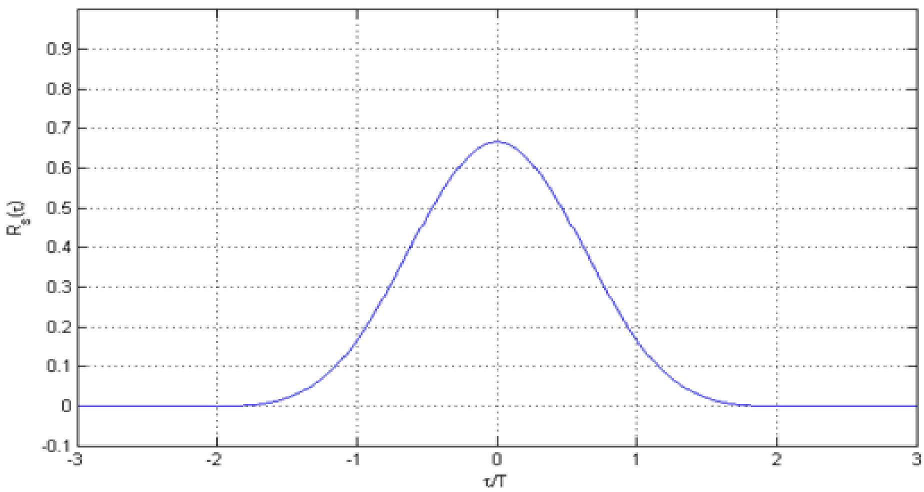
$$+ \frac{1}{T^2}\int_{0}^{\tau+T} R_X(w)\cdot(\tau + T - w)\,dw =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{\tau}\left(1+\frac{w}{T}\right)\cdot(w + T - \tau)\,dw + \frac{1}{T^2}\int_{\tau}^{0}\left(1+\frac{w}{T}\right)\cdot(\tau + T - w)\,dw +$$

$$+ \frac{1}{T^2}\int_{0}^{\tau+T}\left(1-\frac{w}{T}\right)\cdot(\tau + T - w)\,dw = \cdots =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\tau}{T}\right)^3 - \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 + \frac{2}{3}\,.$$

Kako je autokorelacija parna funkcija ovime je određena i za $\tau > 0$.



Zadatak:

Stacionaran Markovljev izvor sa alfabetom $\{0,1\}$ ima verovatnoće prelaza

$$P[0|0] = P[1|1] = 1 - p,$$
$$P[1|0] = P[0|1] = p,$$

gde je $p \ll 1$. Izlazna sekvenca ovog izvora, x_n, koduje se run-length kodom sa zapisima dužine 3 bita na sledeći način. Prvo se diferencijalnim kodovanjem formira sekvenca

$$y_n = x_{n-1} \oplus x_n,$$

gde "$\oplus$" označava sabiranje po modulu 2 i uzima se da je $x_{-1} = 0$, a zatim se odgovarajući blokovi bita sekvence y_n zamenjuju izlaznim zapisima prema sledećoj tabeli

blok y_n	zapis
1	000
01	001
001	010
0001	011
00001	100
000001	101
0000001	110
0000000	111

.

Na primer, za polaznu sekvencu

$$\overbrace{00\cdots0}^{20}\overbrace{11\cdots1}^{10}\overbrace{00\cdots0}^{30}\overbrace{11\cdots1}^{20}\ldots$$

nakon diferencijalnog kodovanja se dobija

$$\overbrace{00\cdots0}^{20}1\overbrace{0\cdots0}^{9}1\overbrace{0\cdots0}^{29}1\overbrace{0\cdots0}^{19}1\ldots$$

a konačna kodovana sekvenca je

111 111 110 111 010 111 111 111 111 001 111 111 101 ...

Izračunati koliko bita kodovane sekvence se u proseku troši za jedan bit polazne sekvence, u opštem slučaju.

Rešenje:

Ako se posmatra dugačka sekvenca koju stvara dati Markovljev izvor, ona se tipično sastoji iz dužih blokova uzastopnih nula i uzastopnih jedinica. Nakon svakog bita, promena se dešava sa verovatnoćom p, a zadržava se ista vrednost sa verovatnoćom $1-p$. Na osnovu postupka kodovanja može da se zaključi da su ovo verovatnoće bita u sekvenci nakon diferencijalnog kodovanja, tj.

$$P[y_n = 0] = 1 - p,$$
$$P[y_n = 1] = p.$$

Neka su $L'_1, L'_2, \ldots, L'_K$ dužine uzastopnih blokova istih bita polazne sekvence, a $L''_1, L''_2, \ldots, L''_K$ dužine njima odgovarajućih delova kodovane sekvence. Broj bita kodovane sekvence koji se u proseku troši za jedan bit polazne sekvence jeste

$$\alpha = \frac{E[\sum_{k=1}^{K} L''_k]}{E[\sum_{k=1}^{K} L'_k]} = \frac{KE[L'']}{KE[L']} = \frac{E[L'']}{E[L']},$$

gde su L' i L'' slučajne promenljive koje označavaju dužine polaznog bloka istih bita i njemu odgovarajućeg kodovanog bloka, tim redom, pri čemu je zbog simetrije Markovljevog izvora iskorišćeno da sve dužine polaznih blokova istih bita imaju istu raspodelu. S obzirom da sekvenca nakon diferencijalnog kodovanja ima isti broj bita kao polazna, može da se uspostavi veza između posmatranih veličina kao u sledećoj tabeli.

blok y_n	kodovani blok	L'	L''	verovatnoća
1	000	1	3	p
01	001	2	3	$(1-p)p$
001	010	3	3	$(1-p)^2p$
0001	010	4	3	$(1-p)^3p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overbrace{0\cdots0}^{6}1$	110	7	3	$(1-p)^6p$
$\overbrace{0\cdots0}^{7}1$	111 000	8	6	$(1-p)^7p$
$\overbrace{0\cdots0}^{8}1$	111 001	9	6	$(1-p)^8p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overbrace{0\cdots0}^{13}1$	111 110	14	6	$(1-p)^{13}p$
$\overbrace{0\cdots0}^{14}1$	111 111 000	15	9	$(1-p)^{14}p$
$\overbrace{0\cdots0}^{15}1$	111 111 001	16	9	$(1-p)^{15}p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Radi lakšeg izračunavanja, pogodno je da se uvede pomoćna funkcija

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (x^i)' = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i\right)' = \left(x\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Na osnovu prethodne tabele, dobija se

$$E[L'] = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1}pi = p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} = pf(1-p) = \frac{1}{p}$$

i

$$
\begin{aligned}
E[L''] &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{6}(1-p)^{7i+j}p\cdot 3(i+1) = 3p\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(1-p)^{7i}\cdot\sum_{j=0}^{6}(1-p)^{j} = \\
&= 3p\sum_{i=1}^{\infty} i\left((1-p)^7\right)^{i-1}\cdot\frac{1-(1-p)^7}{1-(1-p)} = 3\left(1-(1-p)^7\right)f\left((1-p)^7\right) = \\
&= \frac{3}{1-(1-p)^7},
\end{aligned}
$$

odakle je

$$\alpha = \frac{3p}{1-(1-p)^7}.$$

Za male verovatnoće promene, p, dobija se

$$\alpha = \lim_{p\to 0+}\frac{3p}{1-(1-p)^7} = \lim_{p\to 0+}\frac{3}{-7(1-p)^6(-1)} = \frac{3}{7}.$$