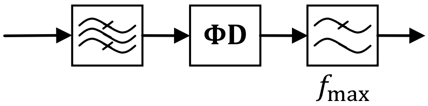
Analogne modulacije

Na slici 1. prikazan je ΦM prijemnik. Ulazni pojasni filtar propušta sve značajne komponente ΦM signala. Idealni fazni demodulator ΦD na izlazu daje signal amplitude U_m kada je faza signala na ulazu $\Delta\phi$, gde je sa $\Delta\phi$ označena maksimalna devijacija faze. Osim signala, na ulaz prijemnika stiže i beli Gausov šum. Ako je poznato da je odnos signal šum na ulazu faznog demodulatora $\mathrm{SNR_u} = 40$ dB, maksimalna devijacija faze $\Delta\phi = \pi/2$ i snaga normalizovanog modulišućeg signala $\overline{m^2(t)} = 1/2$ odrediti odnos signal šum na izlazu prijemnika. Maksimalna učestanost modulišućeg signala iznosti f_{max}. Pri izračunavanju demodulisanog signala iskoristiti činjenicu da je snaga signala mnogo puta veća od snage šuma.



Slika 1.

Pomoć: $\mathrm{atan}\left(\frac{U_1 \sin\phi + U_2 \sin\theta}{U_1 \cos\phi + U_2 \cos\theta}\right) = \phi + \mathrm{atan}\left(\frac{\sin(\theta-\phi)}{\frac{U_1}{U_2} + \cos(\theta-\phi)}\right).$

Analog modulations

Figure 1. depicts the receiver of a phase modulated signal. Band-pass filter at the input passes through all significant components of a PM signal. Ideal phase demodulator outputs signal of amplitude U_m when the phase of the input signal is $\Delta\phi$, where $\Delta\phi$ denotes maximum phase deviation. Besides the signal, there is a white Gaussian noise at the input of a receiver. If it is known that signal to noise ratio at the input of a phase demodulator is $\mathrm{SNR_u} = 40$ dB, maximum phase deviation $\Delta\phi = \pi/2$ and normalized modulating signal's power is $\overline{m^2(t)} = 1/2$, find signal to noise ratio at the output of the receiver. Modulating signal's maximum frequency is f_{max}. When calculating the demodulated signal, use the fact that signal's power is much larger that that of the noise.

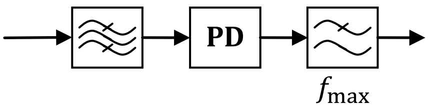


Figure 1.

Help: $\mathrm{atan}\left(\frac{U_1 \sin\phi + U_2 \sin\theta}{U_1 \cos\phi + U_2 \cos\theta}\right) = \phi + \mathrm{atan}\left(\frac{\sin(\theta-\phi)}{\frac{U_1}{U_2} + \cos(\theta-\phi)}\right).$

Rešenje:

Modulisani ΦM signal je:

$$u(t) = U\cos\big(2\pi f_c t + \Delta\phi\, m(t)\big).$$

Prema Carsonovom obrascu širina značajnog dela spektra fazno modulisanog signala ima vrednost $B = 2f_{\max}(\Delta\phi + 1)$, tako da filtar na ulaz propušta sve učestanosti iz opsega $\left(f_c - \frac{B}{2} \div f_c + \frac{B}{2}\right)$.
Stoga je odnos SNR na ulazu u idealni fazni demodulator:

$$\mathrm{SNR_u} = \frac{U^2/2}{p_n 2B} = \frac{U^2}{8p_n f_{\max}(\Delta\phi+1)}.$$

gde je sa p_n označena spektralna gustina snage šuma.
Signal na ulazu ΦD je:

$$v(t) = u(t) + n_c(t)\cos 2\pi f_c t - n_s(t)\sin 2\pi f_c t.$$

Da bi pojednostavili izvođenje šum ćemo prikazati pomoću prostoperiodičnog signala:

$$n_c(t)\cos 2\pi f_c t - n_s(t)\sin 2\pi f_c t = A_n(t)\cos(\,2\pi f_c t + \theta(t)),$$

gde je:

$$A_n(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)},$$

$$\theta(t) = \operatorname{atan}\frac{n_s(t)}{n_c(t)},$$

tako da signal na ulazu ΦD možemo predstaviti kao

$$v(t) = A_v(t)\cos(2\pi f_c t + \psi(t)),$$

gde je:

$$\psi(t) = \operatorname{atan}\frac{U\sin\phi(t) + A_n(t)\sin\theta(t)}{U\cos\phi(t) + A_n(t)\cos\theta(t)} = \phi(t) + \operatorname{atan}\frac{\sin(\theta(t)-\phi(t))}{\frac{U}{A_n(t)} + \cos(\theta(t)-\phi(t))}.$$

Pošto je odnos signal šum na ulazu uΦD 40dB možemo smatrati da je snaga signala mnogo puta veća od snage šuma, odnosno da je $U \gg A_n(t)$, odnosno da je $\frac{U}{A_n(t)} \gg 1$. Tako da se dobija

$$\psi(t) \simeq \phi(t) + \operatorname{atan}\frac{\sin(\theta(t)-\phi(t))}{\frac{U}{A_n(t)}} \simeq \phi(t) + \frac{A_n(t)\sin(\theta(t)-\phi(t))}{U}.$$

Pošto je $\theta(t)$ slučajna veličina, a $\phi(t)$ faza ugaono modulisanog signala, sa aspekta određivanja snage demodulisanog signala, proporcionalnog sa $\psi(t)$, pomeranje argumenta sinusne funkcije za $\phi(t)$ nema značaja te se može napisati:

$$\psi(t) \simeq \phi(t) + \frac{A_n(t)}{U}\sin\theta(t) = \phi(t) + \frac{n_s(t)}{U}.$$

Demodulisani signal je oblika:

$$u_d(t) = \frac{U_m}{\Delta\phi}\psi(t) = U_m m(t) + \frac{U_m}{\Delta\phi U} n_s(t),$$

a traženi izraz za odnos signal šum:

$$\mathrm{SNR_i} = \frac{U_m^2\overline{m^2(t)}}{\frac{U_m^2}{\Delta\phi^2 U^2}2p_n 2f_{\max}} = \frac{\Delta\phi^2 U^2}{8p_n f_{\max}} = \Delta\phi^2(\Delta\phi + 1)\mathrm{SNR_i}.$$

Uvrštavanjem odgovarajućih vrednosti:

$$\mathrm{SNR_{idB}} = 10\log\big(\Delta\phi^2(\Delta\phi + 1)\big) + \mathrm{SNR_{idB}} = 48\ \mathrm{dB}.$$

Signali i sistemi

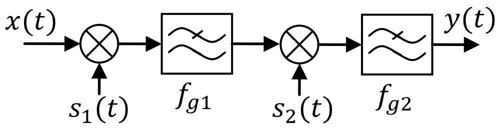
Na Slici 1. prikazan je sistem koji se sastoji od dva množača signala i dva idealna NF filtra nultog grupnog kašnjenja. Odrediti graničnu učestanost f_{g2} kao i oblik prostoperiodičnog signala $s_2(t)$ tako da u slučaju kada se na ulaz dovede signal $x(t)$ dat izrazom:

$$x(t) = 2\frac{\cos(3000\pi t)}{\pi t}\sin(1000\pi t)$$

izlazni signal $y(t)$ bude jednak ulaznom signalu, tj. $y(t) = x(t)$. Granična učestanost prvog NF filtra je $f_{g1} = 1$ kHz, a signal $s_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT_1)$ gde je

$$u(t) = \begin{cases} \pi & |t| \leq T_1/4 \\ 0 & |t| > T_1/4 \end{cases}$$

pri čemu je $T_1 = 0.5$ ms.



Slika 1.

Signals and systems

Figure 1. depicts a system which consists of two signal multipliers and two ideal low-pass filters with zero group delay. Find the boundary frequency f_{g2} as well as the sinusoidal signal $s_2(t)$, so that, when the input signal $x(t)$ is given by:

$$x(t) = 2\frac{\cos(3000\pi t)}{\pi t}\sin(1000\pi t)$$

the output signal $y(t)$ is equal to the input signal, i.e., $y(t) = x(t)$. The boundary frequency of the first low-pass filter is $f_{g1} = 1$ kHz, and signal $s_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT_1)$ where

$$u(t) = \begin{cases} \pi & |t| \leq T_1/4 \\ 0 & |t| > T_1/4 \end{cases}$$

with $T_1 = 0.5$ ms.

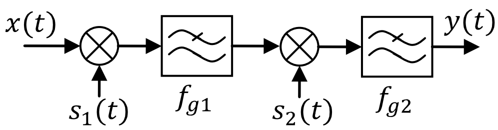


Figure 1.

Rešenje:

Ulazni signal je

$$x(t) = \frac{\sin(1000\pi t)}{\pi t} \cdot 2\cos(3000\pi t).$$

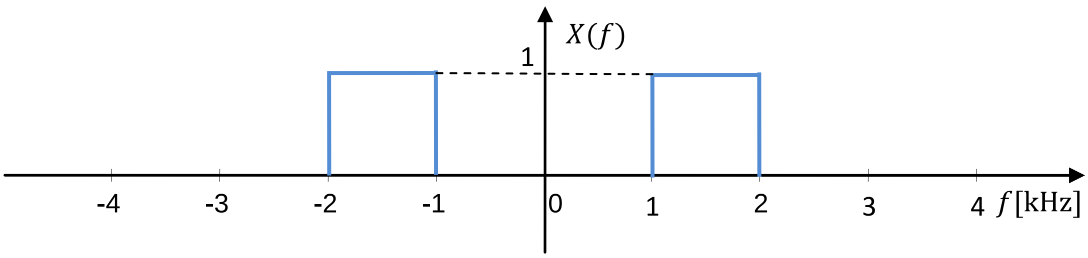
Prvi faktor, $1000\frac{\sin(1000\pi t)}{1000\,\pi t}$, predstavlja IFT funkcije

$$X_{p1}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq 500 \\ 0 & \text{drugde} \end{cases}.$$

FT od $2\cos(3000\pi t)$ je

$$X_{p2}(f) = \delta(f - 1500) + \delta(f + 1500),$$

te je spektar signala $x(t)$ dat izrazom $X(f) = X_{p1}(f - 1500) + X_{p1}(f + 1500)$ odnosno kao na slici dole.



Spektar signala $u(t)$ je dat izrazom:

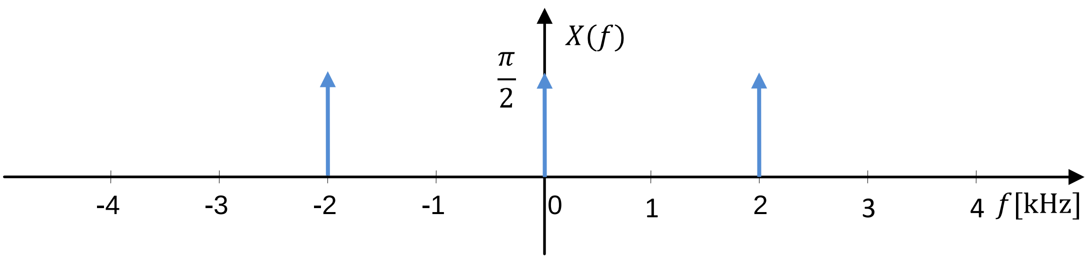
$$U(f) = \frac{\pi T_1}{2}\frac{\sin\frac{\pi f T_1}{2}}{\frac{\pi f T_1}{2}},$$

tako da je spektar signala $s_1(t)$:

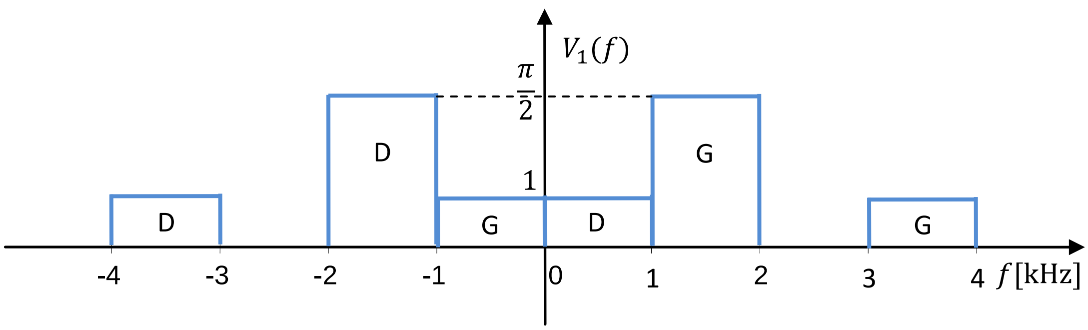
$$S_1(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \delta\left(f - \frac{k}{T_1}\right),$$

gde je

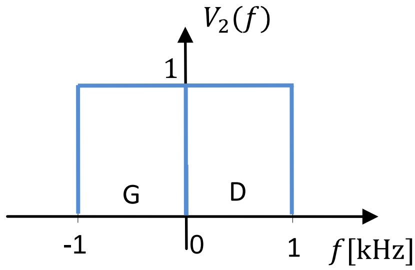
$$U_k = \frac{1}{T_1} U\left(\frac{k}{T_1}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\frac{\pi k}{2}}.$$



Ako sa $v_1(t) = s_1(t)x(t)$ tada se spektar dobija kao $V_1(f) = S_1(f) * X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k X\left(f - \frac{k}{T_1}\right)$.



Spektar signala na izlazu prvog NF filtra je



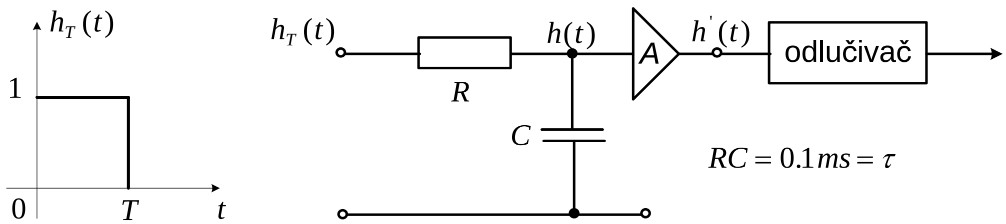
Pošto je spektar signala realan donji i gornji podopseg su identični tako da je svejedno koji će biti transliran na opseg od 1 do 2 kHz. Ali pošto je na izlazu NF filtar, onda je rešenje ipak jednoznačno, odnosno

$$s_2(t) = 2\cos(4000\pi t),$$

a granična učestanost NF filtra $f_{g2} = 2$ kHz.

Digitalne telekomunikacije

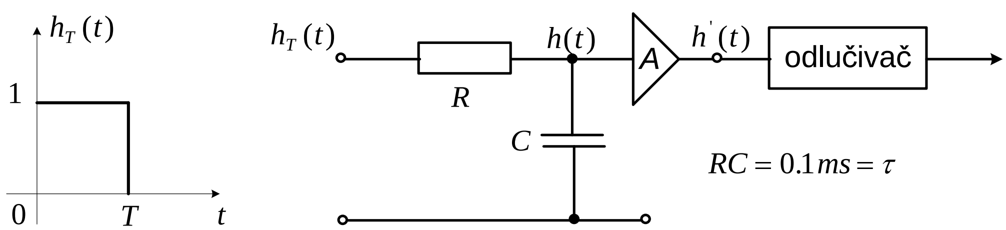
Prijemnik digitalnog signala sa pravougaonim elementarnim impulsima trajanja T prikazan je na slici. Brzina signalizacije je $v_s = 1/T$. Simboli digitalnog signala su iz M-arnog polarnog alfabeta, a polovina rastojanja između susednih simbola je d.



a) Odrediti optimalni trenutak odabiranja na prijemu.
b) Odrediti pojačanje A tako da bude $h'(T) = 1$.
c) Odrediti maksimalnu ISI.
d) Za koju brzinu signalizacije će doći do zatvaranja dijagrama oka u prijemniku i koliki je tada digitalni protok, ako je $M = 2, 4, 8$ ili 16?

Digital communications

The receiver of a digital signal with elementary impulse $h_T(t)$ is depicted below. Symbol rate is $v_s = 1/T$. Symbols of the digital signal are from M-ary polar alphabet, and d is half the distance between neighbouring symbols.



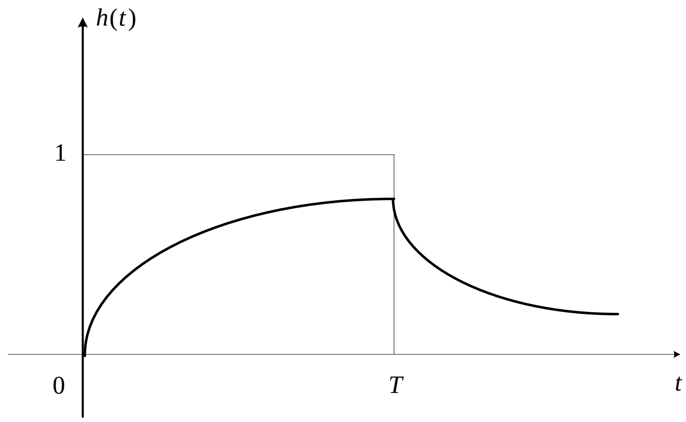
a) Find the optimal sampling moment at the receiver.
b) Find the amplification A so that $h'(T) = 1$.
c) Find the maximal ISI (intersymbol interference).
d) What symbol rate causes eye diagram (at the receiver) to close and what is the value of the corresponding bit rate, if $M = 2, 4, 8$ or 16?

Rešenje:

Odziv RC kola $h(t)$ na pobudu $h_T(t)$ dat je izrazom:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-t/\tau} & 0 \le t \le T, \\ \left(1 - e^{-T/\tau}\right) \cdot e^{-(t-T)/\tau} & t > T. \end{cases}$$

(20%)



Odziv RC kola na pobudu signalom $h_T(t)$

a) Zbog datog oblika odziva, odlučivanje se izvodi sa T sekundi zakašnjenja (tada je odziv maksimalan).

(10%)

b)

$$h'(t)\Big|_{t=T} = A \cdot h(T) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}.$$

(10%)

c) U $t = T$ odlučuje se o simbolu poslatom u $t = 0$;

$$\left.\begin{aligned} h_k &= h(T + kT) = \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) e^{-\frac{kT}{\tau}} \\ h_k' &= A \cdot h_k = e^{-\frac{kT}{\tau}} \end{aligned}\right\} k = 0 \Rightarrow \text{korisni odbirak}, \; k = 1,2,3,\ldots \Rightarrow \text{ISI}.$$

Sumiranjem se dobija:

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \cdot h_k',$$

$$I_{\max} = (M-1)d \sum_{k=1}^{\infty} \left|h_k'\right| = (M-1)d \frac{e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} = \frac{(M-1)d}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1}.$$

(30%)

d) Oko *se* zatvara za $I_{\max} \ge d$:

$$d = \frac{(M-1)d}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} \Rightarrow T = \tau \cdot \ln M;\ v_s = \frac{1}{T},$$

$$v_d = \frac{\mathrm{ld}\, M}{T} = \frac{\mathrm{ld}\, M}{\tau \cdot \ln M} = \frac{1}{\tau \cdot \ln 2} = 14{,}4\,\frac{kb}{s}.$$

M	2	4	8	16
T [μs]	69	139	208	277
A	2	1,33	1,14	1,07
v_S [kBd]	14,4	7,2	4,8	3,6

Parametri digitalnog signala pri kojim dolazi do zatvaranja dijagrama oka

$v_d \neq f(M)$ - digitalni protok, pri kojem dolazi do zatvaranja dijagrama oka u ovakvom sistemu, ne zavisi od broja simbola M jer nije ograničen propusni opseg.

U tabeli je prikazano da se porastom broja simbola M, isti digitalni protok postiže sa manjom brzinom signalizacije.

(30%)

Statistička teorija telekomunikacija

Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ slučajan proces u diskretnom vremenu takav da su X_n međusobno nezavisne slučajne promenljive sa Gausovom raspodelom:

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Slučajan proces $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dobijen je transformacijom procesa $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ na sledeći način:

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot X_{n-k}.$$

Odrediti srednju vrednost i autokorelaciju procesa $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Da li je ovaj proces stacionaran u širem smislu?

Statistical theory of communications

Let $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a discrete time random process such that X_n are mutually independent random variables with Gaussian distribution:

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Random process $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is obtained by transforming the process $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in the following way:

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot X_{n-k}.$$

Find the mean and autocorrelation function of the process $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Is this a wide-sense stationary process?

Rešenje:

Prema uslovima zadatka:

$$E[X_n] = \mu,$$

$$R_{XX}(n, n+l) = E[X_n X_{n+l}] = \begin{cases} \mu^2 & l \neq 0 \\ \mu^2 + \sigma^2 & l = 0 \end{cases} = \mu^2 + \sigma^2 \delta(l).$$

Sada imamo:

$$E[Y_n] = E[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X_{n-k}] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} E[X_{n-k}] = \mu \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2\mu,$$

$$R_{YY}(n, n+l) = E[Y_n Y_{n+l}] = E[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X_{n-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \cdot X_{n+l-m}] =$$

$$= E[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{-m} X_{n-k} X_{n+l-m}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{-m} E[X_{n-k} X_{n+l-m}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{-m} R_{XX}(n-k, n+l-m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{-m} \big(\mu^2 + \sigma^2 \delta(l-m+k)\big) =$$

$$= \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{-m} + \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{-m} \delta(k+l-m) =$$

$$= 4\mu^2 + \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(k+l)} \delta(k+l-m) =$$

$$= 4\mu^2 + \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{-(k+l)} \sum_{m=0}^{\infty} \delta(k+l-m) =$$

$$= 4\mu^2 + \sigma^2 2^{-l} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} = 4\mu^2 + \frac{4}{3} \sigma^2 2^{-l}.$$

Proces $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je prema tome stacionaran u širem smislu.

Teorija informacija

Binarni simetrični kanali C_1 i C_2 imaju verovatnoće greške p i $1-p$, tim redom. Neka je C kanal koji se dobija istovremenim korišćenjem kanala C_1 i C_2. Odrediti za koliko se promeni kapacitet kanala C kada se C_1 i C_2 spregnu na način da se greška u C_2 dešava ako i samo ako se istovremeno ne dešava greška u C_1, u poređenju sa slučajem kada su C_1 i C_2 nezavisni.

Information theory

Binary symmetric channels C_1 and C_2 have error probabilities p and $1-p$, respectively. Let C be the channel obtained by simultaneously using channels C_1 and C_2. By how much is capacity of the channel C changed when C_1 and C_2 are coupled in such a way that error in C_2 occurs if and only if error in C_1 does not occur, compared to the case when C_1 and C_2 are independent.

Rešenje:

Ako je $\{0,1\}$ predajni i prijemni alfabet kanala C_1 i C_2, zbog njihovog istovremenog korišćenja kanal C ima predajni i prijemni alfabet $A = \{00, 01, 10, 11\}$, gde prvi simbol svakog para odgovara kanalu C_1, a drugi kanalu C_2. Razmatraju se dva slučaja:

- **C_1 i C_2 su nezavisni.**

  Neka je C' ekvivalentni združeni kanal. Iz nezavisnosti sledi

  $$P[y_1, y_2|x_1, x_2] = P[y_1|x_1]P[y_2|x_2],$$

  gde je x_i predajni, a y_i prijemni simbol kanala C_i. Odavde se dobija matrica uslovnih verovatnoća kanala C',

  $$\Pi_{C'} = \begin{bmatrix} p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 & p(1-p) \\ (1-p)^2 & p(1-p) & p(1-p) & p^2 \\ p^2 & p(1-p) & p(1-p) & (1-p)^2 \\ p(1-p) & p^2 & (1-p)^2 & p(1-p) \end{bmatrix},$$

  pri čemu je pretpostavljen redosled predajnih i prijemnih simbola $00, 01, 10, 11$. Zamena vrsta ove matrice odgovara zameni predajnih simbola, a zamena njenih kolona odgovara zameni prijemnih simbola. Nijedna od ovih zamena ne utiče na kapacitet kanala. Ako se zamene vrste $1 \leftrightarrow 4$ i $2 \leftrightarrow 3$ i ako se zamene kolone $1 \leftrightarrow 4$ i $2 \leftrightarrow 3$, dobija se polazna matrica. S obzirom da se pri zamenama predajnih simbola zamenjuju i njihove verovatnoće za koje se maksimizuje transinformacija, a da je dobijena ista matrica kao na početku, sledi da za optimalne predajne verovatnoće važi

  $$P[00] = P[11], \qquad P[01] = P[10].$$

  Slično, zamenama vrsta $1 \leftrightarrow 2$ i $3 \leftrightarrow 4$ i zamenama kolona $1 \leftrightarrow 2$ i $3 \leftrightarrow 4$, dobija se polazna matrica, pa je istim rasuđivanjem

  $$P[00] = P[01], \qquad P[10] = P[11],$$

  odakle je

  $$P[00] = P[01] = P[10] = P[11] = \frac{1}{4},$$

  tj. kapacitet se postiže za jednako verovatne predajne simbole. Kako je

  $$P[y] = \sum_{x \in A} P[x]P[y|x], \quad y \in A,$$

  gde je x predajni, a y prijemni simbol združenog kanala, zbog vrednosti elemenata kanalne matrice zaključuje se da su i svi prijemni simboli jednako verovatni. Na osnovu toga se neposrednim izračunavanjem dobija

  $$\begin{aligned} R_{C'} &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in A} P[x]P[y|x] \operatorname{ld} \frac{P[y|x]}{P[y]} = \\ &= \left(2 \cdot \frac{1}{4}p(1-p) \operatorname{ld} \frac{p(1-p)}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}(1-p)^2 \operatorname{ld} \frac{(1-p)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}p^2 \operatorname{ld} \frac{p^2}{\frac{1}{4}}\right) \cdot 4 = \\ &= 2 - 2H(p), \end{aligned}$$

  gde je

  $$H(p) = -p \operatorname{ld} p - (1-p) \operatorname{ld}(1-p)$$

  binarna entropijska funkcija. Ovaj zaključak može da se izvede i bez formiranja kanalne matrice kanala C', jer je kapacitet istovremenog korišćenja nezavisnih kanala jednak zbiru njihovih kapaciteta, koji su ovde $1 - H(p) = 1 - H(1-p)$.

- **C_1 i C_2 su spregnuti tako da se u C_2 dešava greška ako i samo ako se istovremeno u C_1 ne dešava greška.**

  Neka je C'' ekvivalentni združeni kanal. Iz definicije zavisnosti C_1 i C_2 dobija se matrica uslovnih verovatnoća kanala C'',

$$\Pi_{C''} = \begin{bmatrix} 0 & 1-p & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p & 0 \end{bmatrix},$$

  gde je pretpostavljen isti redosled predajnih i prijemnih simbola iz A kao u prethodnom slučaju. Pomoću istih grupa zamena vrsta i kolona kao tada, pri kojima se i sada dobija polazna matrica, zaključuje se da su optimalne verovatnoće predajnih simbola jednake,

$$P[00] = P[01] = P[10] = P[11] = \frac{1}{4},$$

  a da isto važi i za verovatnoće prijemnih simbola, zbog vrednosti elemenata kanalne matrice. Neposrednim izračunavanjem se u ovom slučaju dobija

$$\begin{aligned} R_{C''} &= \sum_{x\in A}\sum_{y\in A} P[x]P[y|x] \operatorname{ld} \frac{P[y|x]}{P[y]} = \\ &= \left(\frac{1}{4}(1-p) \operatorname{ld} \frac{1-p}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} p \operatorname{ld} \frac{p}{\frac{1}{4}}\right) \cdot 4 = \\ &= 2 - H(p). \end{aligned}$$

Konačno, povećanje kapaciteta ekvivalentnog združenog kanala usled sprezanja jeste

$$\Delta R_C = R_{C''} - R_{C'} = H(p).$$