Analogne modulacije / Analog modulations

Zadatak:

Na slici 1 je prikazana blok šema prijemnika AM-1B0 signala sa sinhronom demodulacijom. Modulišući signal $m(t)$ ima spektar u opsegu $(-f_m \div f_m)$ i snagu P_m. Učestanost nosioca je f_c, a amplituda k. Osim AM-1B0 modulisanog signala $u(t)$ (sa donjim bočnim opsegom) na ulazu prijemnika postoji i aditivni beli Gausov šum $n(t)$ čija je spektralna gustina snage $p_n = N_0/2$. Odrediti odnos signal/šum na izlazu prijemnika.

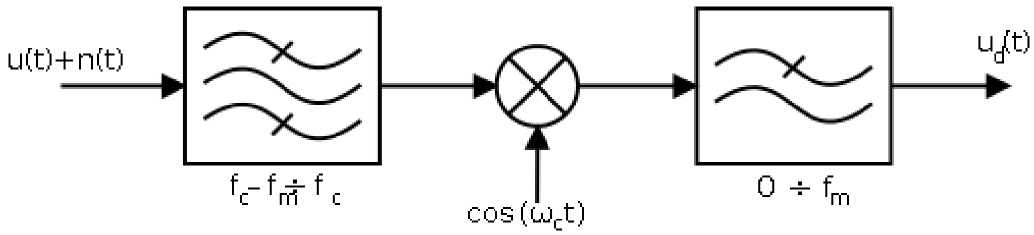


Figure 1: Sinhroni prijemnik / Synchronous receiver

Problem:

Figure 1 depicts the receiver of the SSB modulated signal with synchronous demodulation. The power of the modulating signal $m(t)$ is P_m and its spectrum is contained in the band $(-f_m \div f_m)$. The carrier has frequency f_c, and amplitude k. Together with the SSB modulated signal $u(t)$ (with lower sideband), at the input of the receiver there is also an additive white Gaussian noise $n(t)$ with spectral power density $p_n = N_0/2$. Determine the signal to noise ratio at the output of the receiver.

Rešenje:

Modulisani signal je:

$$u(t) = k\ m(t)\cos(2\pi f_c t) + k\ \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t).$$

Korisni signal na izlazu množača je:

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= u(t)\cos(2\pi f_c t)\\
&= k\ m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) + k\ \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t)\\
&= \frac{1}{2}k\ m(t) + \frac{1}{2}k\ m(t)\cos(2\pi 2 f_c t) + \frac{1}{2}k\ \hat{m}(t)\sin(2\pi 2 f_c t)
\end{aligned}$$

tako da je korisni signal na izlazu NF filtra:

$$u_d(t) = \frac{1}{2}k\ m(t)$$

a njegova snaga:

$$P_d = \overline{u_d^2(t)} = \overline{\frac{1}{4}k^2\ m^2(t)} = \frac{1}{4}k^2 P_m.$$

Uskopojasni šum na ulazu množača je:

$$n_1(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_0 t) + n_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

a snaga:

$$P_{n1} = 2\int_{f_c - f_m}^{f_c} p_N df = 2 p_N f_m = N_0 f_m$$

i jednaka je snazi svake od niskofrekvencijskih komponenata šuma $n_c(t)$ i $n_s(t)$. Učestanost f_0 predstavlja centralnu učestanost propusnika opsega i u ovom zadatku iznosi $f_0 = f_c - f_m/2$. Šum na izlazu množača je:

$$\begin{aligned}
n_2(t) &= n_1(t)\cos(2\pi f_c t)\\
&= n_c(t)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_c t)\\
&= \frac{1}{2}n_c(t)\cos(2\pi(f_0 - f_c)t) + \frac{1}{2}n_c(t)\cos(2\pi(f_0 + f_c)t) +\\
&\quad + \frac{1}{2}n_s(t)\sin(2\pi(f_0 - f_c)t) + \frac{1}{2}n_s(t)\sin(2\pi(f_0 + f_c)t)\\
&= \frac{1}{2}n_c(t)\cos(\pi f_m t) + \frac{1}{2}n_c(t)\cos(2\pi(2f_c - f_m/2)t) +\\
&\quad - \frac{1}{2}n_s(t)\sin(\pi f_m t) + \frac{1}{2}n_s(t)\sin(2\pi(2f_c - f_m/2)t).
\end{aligned}$$

Šum na izlazu NF filtra je takodje uskopojasni šum sa centralnom učestanošću $f_m/2$:

$$n_3(t) = \frac{1}{2}n_c(t)\cos(\pi f_m t) - \frac{1}{2}n_s(t)\sin(\pi f_m t)$$

tako da je njegova snaga:

$$P_{n3} = \frac{1}{4}\int_{-f_m}^{f_m} p_N df = \frac{1}{4}p_N 2 f_m = \frac{N_0 f_m}{4}.$$

Traženi odnos signal/šum je:

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_d}{P_{n3}} = \frac{k^2 P_m}{N_0 f_m}.$$

Signali i sistemi / Signals and systems

Zadatak:

Signal $s(t)$ ima spektar $S(f)$ ograničen na interval učestanosti $(-f_m \div f_m)$. Odabiranjem signala $s(t)$ dobijaju se dva signala odbiraka:

$$s_1(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \quad \text{i}$$

$$s_2(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s - \tau_0),$$

pri čemu je $T_s = \frac{1}{f_m}$ i $0 < \tau_0 < T_s/4$. Smatrati da je signal $s(t)$ realan. Da li je na osnovu spektara signala odbiraka $s_1(t)$ i $s_2(t)$ moguće rekonstruisati spektar originalnog signala? Odgovor potkrepiti odgovarajućim dokazom.

Problem:

The signal $s(t)$ is real, with a spectrum $S(f)$ contained in the band $(-f_m \div f_m)$. By sampling $s(t)$, two new signals are obtained as follows:

$$s_1(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \quad \text{and}$$

$$s_2(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s - \tau_0),$$

where $T_s = \frac{1}{f_m}$ and $0 < \tau_0 < T_s/4$. Is it possible to reconstruct perfectly the spectrum of the original signal $S(f)$ from the spectrums of the signals $s_1(t)$ and $s_2(t)$? Prove your answer.

Rešenje:

Originalni signal je moguće rekonstruisati. Spektar signala $s_2(t)$ je:

$$\begin{aligned} S_2(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s-\tau_0) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T_s}(t-\tau_0)} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\frac{2\pi}{T_s}\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi(f-\frac{k}{T_s})t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\frac{2\pi}{T_s}\tau_0} S(f-\frac{k}{T_s}). \end{aligned}$$

Pri traženju spektra $S_2(f)$ iskorišćena je jednakost:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s-\tau_0) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T_s}(t-\tau_0)}$$

do koje se može doći razvojem povorke delta impulsa u Furijeov red. Spektar signala $s_1(t)$ se dobija na osnovu spektra signala $s_2(t)$ jednostavnom zamenom $\tau_0 = 0$, odnosno

$$S_1(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f-\frac{k}{T_s}).$$

Zbog hermitske simetrije spektra signala $s(t)$ i periodičnosti spektara signala odbiraka dovoljno je posmatrati opseg učestanosti $(0 \div f_m)$. Na tom opsegu

$$\begin{aligned} S_1(f) &= f_m \left(S(f) + S(f-f_m)\right) \\ S_2(f) &= f_m \left(S(f) + e^{-j2\pi\frac{\tau_0}{T_s}} S(f-f_m)\right) \end{aligned}$$

odakle sledi:

$$S(f) = \frac{1}{f_m} \frac{1}{1-\exp(-j2\pi f_m \tau_0)} \left(S_2(f) - e^{-j2\pi f_m \tau_0} S_1(f)\right).$$

Digitalne telekomunikacije / Digital communications

Zadatak:

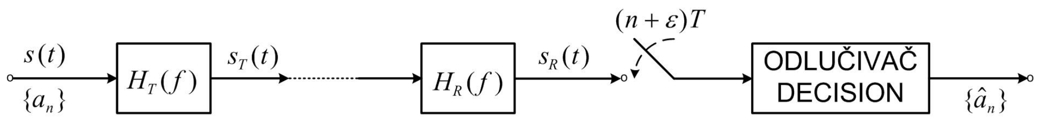
Na slici je prikazan sistem za prenos podataka u osnovnom opsegu učestanosti. Signal $s(t)$ na ulazu u sistem ima oblik:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT)$$

pri čemu simboli a_k uzimaju vrednosti iz skupa $\{-U, U\}$ sa jednakim verovatnoćama. Predajni i prijemni filtri su definisani funkcijama prenosa:

$$H_\mathrm{T}(f) = \begin{cases} T\,, & |f| < \frac{1}{T} \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases} \quad , \quad H_\mathrm{R}(f) = \begin{cases} 1\,, & |f| < \frac{1}{2T} \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}$$

Odluka o n-tom simbolu na prijemu se vrši na osnovu odbirka signala $s_\mathrm{R}(t)$ u trenutku $t = (n+\epsilon)T$, gde je ϵ greška u sinhronizaciji, $|\epsilon| < 1/2$. Odrediti maksimalnu dozvoljenu grešku u sinhronizaciji ϵ_max tako da je pouzdan prenos i dalje moguć.



Problem:

The figure depicts a system for baseband transmission of information. The signal $s(t)$ at the input is of the form:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT)$$

where a_k takes on the values $\{-U, U\}$ with equal probabilities. Transfer functions of the transmitting and receiving filters are given by:

$$H_\mathrm{T}(f) = \begin{cases} T\,, & |f| < \frac{1}{T} \\ 0\,, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad , \quad H_\mathrm{R}(f) = \begin{cases} 1\,, & |f| < \frac{1}{2T} \\ 0\,, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Decision about the n'th symbol at the receiver is made based on the sample of the signal $s_\mathrm{R}(t)$ at $t = (n+\epsilon)T$, where ϵ is the synchronization error, $|\epsilon| < 1/2$. Determine the maximal synchronization error ϵ_max so that reliable transmission is still possible.

Rešenje:

Ekvivalentna funkcija prenosa sistema je:

$$H(f) = H_{\mathrm{T}}(f)H_{\mathrm{R}}(f) = \begin{cases} T\,, & |f| < \frac{1}{2T} \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}$$

a odgovarajući impulsni odziv:

$$h(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t},$$

pa signal $s_{\mathrm{R}}(t)$ ima oblik:

$$s_{\mathrm{R}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h(t - kT).$$

U trenutku odlučivanja o n-tom simbolu imamo:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{R}}((n+\epsilon)T) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h((\epsilon + n - k)T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\sin(\pi(\epsilon + n - k))}{\pi(\epsilon + n - k)} \\ &= a_n \frac{\sin(\pi\epsilon)}{\pi\epsilon} + \sum_{m\neq 0} a_{n-m} \frac{\sin(\pi(\epsilon + m))}{\pi(\epsilon + m)}. \end{aligned}$$

Drugi sabirak u gornjem izrazu predstavlja intersimbolsku interferenciju i nepoželjan je pri odlučivanju o simbolu a_n. Da bi prenos informacija bio pouzdan, treba da važi:

$$\left| \sum_{m\neq 0} a_{n-m} \frac{\sin(\pi(\epsilon + m))}{\pi(\epsilon + m)} \right| < U \frac{\sin(\pi\epsilon)}{\pi\epsilon} \tag{1}$$

(prag odlučivanja je na nuli jer su simboli jednako verovatni). U najgorem slučaju imamo:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \sum_{m\neq 0} U \left| \frac{\sin(\pi(\epsilon + m))}{\pi(\epsilon + m)} \right| = U \frac{|\sin(\pi\epsilon)|}{\pi} \sum_{m\neq 0} \left| \frac{1}{m+\epsilon} \right| \\ &= U \frac{|\sin(\pi\epsilon)|}{\pi} \sum_{m>0} \left(\frac{1}{m+\epsilon} + \frac{1}{m-\epsilon} \right) = U \frac{|\sin(\pi\epsilon)|}{\pi} \sum_{m>0} \frac{2m}{m^2 - \epsilon^2} = \infty \end{aligned}$$

što sledi iz činjenice da $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m} = \infty$. Kako maksimalna ISI divergira za sve $\epsilon > 0$ (uslov (1) nije zadovoljen), ne sme se dozvoliti greška u sinhronizaciji, tj. $\epsilon_{\max} = 0$.

Statistička teorija telekomunikacija / Statistical theory of communications

Zadatak:

Neka su $h_0(t), h_1(t), h_2(t), \ldots$ vremenske funkcije definisane sa $h_n(t) = n \cdot h(t)$, pri čemu je:

$$h(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le t < T \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}$$

Neka je $\{\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots\}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih, raspodeljenih prema Poasonovoj raspodeli sa parametrom λ. Odrediti srednju vrednost i autokorelaciju slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$, definisanog na sledeći način:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{a_k}(t - kT).$$

Da li je ovaj proces stacionaran u širem smislu?

Problem:

Let $h_0(t), h_1(t), h_2(t), \ldots$ be functions defined by $h_n(t) = n \cdot h(t)$, where:

$$h(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le t < T \\ 0\,, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Let $\{\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots\}$ be a sequence of independent random variables with Poisson distribution with parameter λ. Find the mean and the autocorrelation function of the random process $\mathbf{X}(t)$, defined by:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{a_k}(t - kT).$$

Is this process wide-sense stationary?

Rešenje:

Slučajne promenljive a_k imaju Poasonovu raspodelu:

$$\mathbb{P}[a_k = n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

čija srednja vrednost i varijansa se mogu lako izračunati:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[a_k] &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}[a_k = n] = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda \\
\mathbb{E}[a_k^2] &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2\mathbb{P}[a_k = n] = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n^2\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{\lambda^m}{(m)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{(m)!} + e^{-\lambda}\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{(m)!} \\
&= \lambda^2 + \lambda \\
\mathbb{D}[a_k] &= \mathbb{E}[a_k^2] - \mathbb{E}[a_k]^2 \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Posmatrajmo sada slučajni proces $\mathbf{X}(t)$. U svakom intervalu $kT \le t < (k+1)T$ proces $\mathbf{X}(t)$ je jednak nekoj od funkcija $h_n(t)$, izabranoj prema Poasonovoj raspodeli, tj. sa verovatnoćom $\mathbb{P}[a_k = n]$. Rezonovanje je isto za svaki interval, pa nadalje možemo posmatrati prvi: $0 \le t < T$.

Srednja vrednost procesa $\mathbf{X}(t)$ je:

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}[a_0 = n]h_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}[a_0 = n]nh(t) = \mathbb{E}[a_0]\cdot h(t) = \mathbb{E}[a_0] = \lambda.$$

Srednja vrednost je dakle konstantna (ne zavisi od t).

Prilikom izračunavanja autokorelacije procesa $\mathbf{X}$, posmatraćemo dva slučaja.

1. Kada t i $t+\tau$ pripadaju istom "signalizacionom" intervalu, tj. $0 \le t, t+\tau < T$:

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{X}}(t, t+\tau) = \mathbb{E}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)] &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}[a_0 = n]h_n(t)h_n(t+\tau) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}[a_0 = n]n^2h(t)h(t+\tau) \\
&= \mathbb{E}[a_0^2] = \lambda + \lambda^2.
\end{aligned}$$

2. Kada t i $t+\tau$ pripadaju različitim intervalima, tj. $0 \le t < T$, $T \le t+\tau < 2T$ (može se uzeti da $t+\tau$ pripada bilo kom drugom intervalu, zaključak će biti isti):

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{X}}(t, t+\tau) = \mathbb{E}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)] &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}[a_0 = n, a_1 = m]h_n(t)h_m(t+\tau-T) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}[a_0 = n]\mathbb{P}[a_1 = m]nmh(t)h(t+\tau-T) \\
&= \mathbb{E}[a_0]\mathbb{E}[a_1] = \lambda^2.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$R_{\mathbf{X}}(t,t+\tau)=\begin{cases}\lambda^2+\lambda & \text{, kada } t \text{ i } t+\tau \text{ pripadaju istom sign. intervalu}\\ \lambda^2 & \text{, kada } t \text{ i } t+\tau \text{ pripadaju različitim sign. intervalima.}\end{cases}$$

Funkcija $R_{\mathbf{X}}(t,t+\tau)$ je za fiksno τ periodična po t sa periodom T, kao što se moglo i očekivati. Za $0 \leq \tau < T$ jedna njena perioda je:

$$R_{\mathbf{X}}(t,t+\tau)=\begin{cases}\lambda^2+\lambda & ,\ t \in [0,T-\tau)\\ \lambda^2 & ,\ t \in [T-\tau,T).\end{cases}$$

Za $\tau > T$, $R_{\mathbf{X}}(t,t+\tau)=\lambda^2$ i ne zavisi od t.

Kao što se vidi iz gornjeg, $R_{\mathbf{X}}(t,t+\tau)$ zavisi od t pa proces $\mathbf{X}$ nije stacionaran u širem smislu.

Teorija informacija / Information theory

Zadatak:

Kaskadno je povezano n istih nezavisnih binarnih kanala sa uslovnim verovatnoćama

$$P[0|0] = 1 - u, \qquad P[1|0] = u, \qquad P[0|1] = v, \qquad P[1|1] = 1 - v,$$

gde je $u < 1/2$ i $v < 1/2$. Ako se u kaskadnu vezu kanala simboli 0 ili 1 šalju sa verovatnoćama 1/2, odrediti verovatnoću greške optimalnog odlučivanja o pojedinačnom simbolu poslatom kroz vezu.

Problem:

A channel is formed by concatenating n identical independent binary channels with transition probabilities

$$P[0|0] = 1 - u, \qquad P[1|0] = u, \qquad P[0|1] = v, \qquad P[1|1] = 1 - v,$$

where $u < 1/2$ and $v < 1/2$. If symbols 0 or 1 are fed to the input of this channel with probabilities 1/2, find the probability of error achieved by the optimum receiver when a single symbol is transmitted.

Rešenje:

Ako je $X = Y_0$ simbol na ulazu u vezu kanala, a Y_k simbol na izlazu iz k-tog kanala u vezi, važi

$$P[Y_k = 0] = P[Y_{k-1} = 0]P[0|0] + P[Y_{k-1} = 1]P[0|1],$$
$$P[Y_k = 1] = P[Y_{k-1} = 0]P[1|0] + P[Y_{k-1} = 1]P[1|1],$$

za $k \in \{1, \ldots, n\}$. Odavde matrica uslovnih verovatnoća pojedinačnog kanala u vezi

$$\Pi = \begin{bmatrix} P[0|0] & P[1|0] \\ P[0|1] & P[1|1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-u & u \\ v & 1-v \end{bmatrix}$$

i vektor verovatnoća simbola na izlazu iz k-tog kanala u vezi

$$p_k = \begin{bmatrix} P[Y_k = 0] & P[Y_k = 1] \end{bmatrix}$$

zadovoljavaju jednačinu

$$p_k = p_{k-1}\Pi.$$

Uzastopnom primenom prethodnog izraza, dobija se

$$p_k = p_0\Pi^k,$$

odakle sledi da je Π^n matrica uslovnih verovatnoća cele veze. Neka su matrice

$$\Pi^k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix}.$$

Kako je $\Pi^k = \Pi^{k-1}\Pi$, elementi prethodnih matrica zadovoljavaju diferencne jednačine

$$a_k = (1-u)a_{k-1} + vb_{k-1},$$
$$b_k = ua_{k-1} + (1-v)b_{k-1},$$
$$c_k = (1-u)c_{k-1} + vd_{k-1},$$
$$d_k = uc_{k-1} + (1-v)d_{k-1},$$

a sabiranjem prve dve i druge dve od njih, dobija se

$$a_k + b_k = a_{k-1} + b_{k-1} = 1,$$
$$c_k + d_k = c_{k-1} + d_{k-1} = 1,$$

gde poslednje jednakosti induktivno slede iz $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ i $d_0 = 1$. Zamenom $b_k = 1 - a_k$ u prvu jednačinu, sledi da je

$$a_k = (1-u-v)a_{k-1} + v = \lambda a_{k-1} + v,$$

gde je $\lambda = 1 - u - v$. Uzastopnom primenom prethodne jednačine dobija se

$$\begin{aligned}
a_1 &= \lambda a_0 + v = \lambda + v, \\
a_2 &= \lambda a_1 + v = \lambda(\lambda + v) + v = \lambda^2 + (\lambda + 1)v, \\
a_3 &= \lambda a_2 + v = \lambda(\lambda^2 + (\lambda + 1)v) + v = \lambda^3 + (\lambda^2 + \lambda + 1)v, \\
&\vdots \\
a_n &= \lambda^n + (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + 1)v = \lambda^n + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}v,
\end{aligned}$$

što nakon sređivanja postaje

$$a_n = \frac{v}{u+v} + \frac{u}{u+v}(1-u-v)^n,$$

odakle je i

$$b_n = \frac{u}{u+v} - \frac{u}{u+v}(1-u-v)^n.$$

Na sličan način se dobija

$$c_n = \frac{v}{u+v} - \frac{v}{u+v}(1-u-v)^n$$

i

$$d_n = \frac{u}{u+v} + \frac{v}{u+v}(1-u-v)^n.$$

Matrica uslovnih verovatnoća cele veze, tj. od X do $Y = Y_n$, jeste

$$\Pi^n = \begin{bmatrix} \frac{v}{u+v} + \frac{u}{u+v}(1-u-v)^n & \frac{u}{u+v} - \frac{u}{u+v}(1-u-v)^n \\ \frac{v}{u+v} - \frac{v}{u+v}(1-u-v)^n & \frac{u}{u+v} + \frac{v}{u+v}(1-u-v)^n \end{bmatrix}.$$

Kako su verovatnoće simbola na predaji jednake, optimalni prijemnik odlučuje po maksimalnoj verodostojnosti,

$$\hat{x}(y) = \arg\max_x P[Y = y|X = x],$$

pa, s obzirom da je $u + v < 1$, tj. $a_n > c_n$ i $d_n > b_n$, važi

$$\hat{x}(0) = 0, \qquad \hat{x}(1) = 1,$$

odnosno $\hat{x}(y) = y$. Verovatnoća greške odlučivanja jeste

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{E}} &= P[\hat{x}(Y) \neq X] = \\ &= P[Y \neq X] = \\ &= P[X = 0]P[Y = 1|X = 0] + P[X = 1]P[Y = 0|X = 1] = \\ &= \frac{1}{2}(1 - (1-u-v)^n) \end{aligned}$$

i ako je $u + v > 0$, $P_E \to 1/2$ kada $n \to \infty$, jer svaki novi kanal u vezi smanjuje pouzdanost prenosa.